


NUMERI COMPLESSI

ESTENSIONE DI $\mathbb{R}$ AGGIUNGENDO i T.C. $i^2 = -1$

GENERA $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

È UN CAMPO, CON LE OPERAZIONI

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

INVERSO Moltiplicativo: $\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$

OSS: SI PUÒ DEFINIRE UN ORDINE TOTALE
(NON COMPLETO)

$$a + bi \leq c + di \quad \text{SE} \quad a < c \quad \text{O}$$

$$a = c \quad \text{E} \quad b \leq d$$

$$z \in \mathbb{C} \quad z = a + bi$$

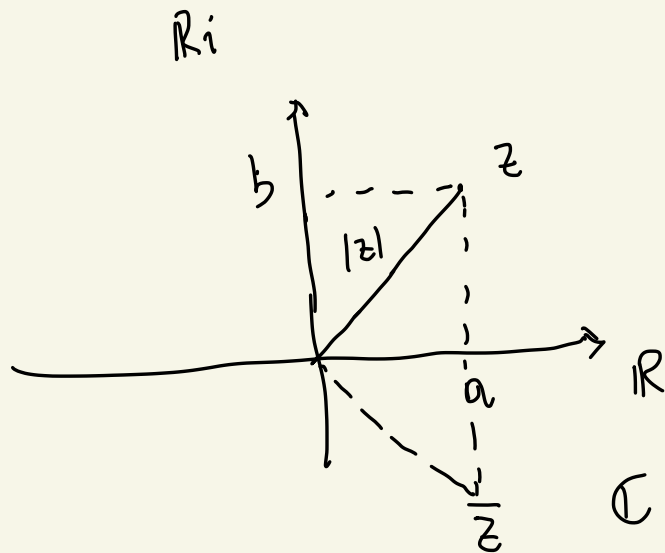
$$\bar{z} = a - bi$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

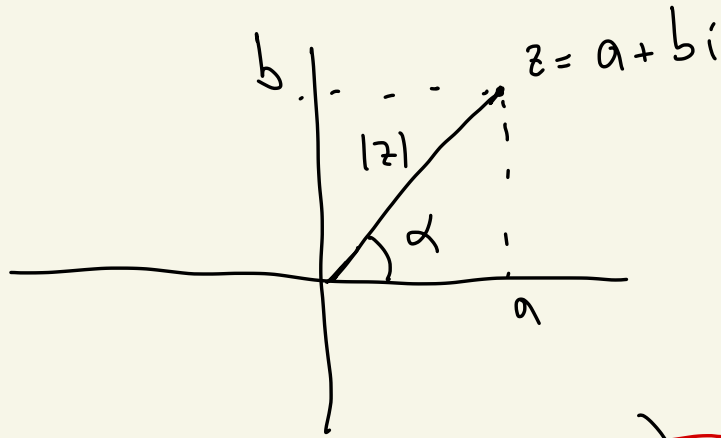
$$1.1: \mathbb{C} \rightarrow [0, +\infty)$$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$



RAPPRESENTAZIONE TRIGONOMETRICA



$$\alpha = \arg(z) \quad \text{È T.C.}$$

$$b = |z| \sin \alpha \quad \text{E}$$

$$a = |z| \cos \alpha$$

$$z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$\arg(z)$ È DEFINITO
A meno di multipli di 2π

$\text{Arg}(z) \in [0, 2\pi)$ SI DICE ARGOMENTO PRINCIPALE
DI z

PROPRIETÀ:

$$z_1 = \rho_1 \cdot (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)$$

$$z_2 = \rho_2 \cdot (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)$$

$$\rho_1 = |z_1|$$

$$\alpha_1 = \arg(z_1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

VERIFICA:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 \rho_2 \left(\underbrace{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2}_{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)} + i \underbrace{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}_{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \right) \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)) \end{aligned}$$

IN PARTICOLARE

$$z = \rho (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$z^n = \rho^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)$$

DE MOIVRE

PONIAHO:

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

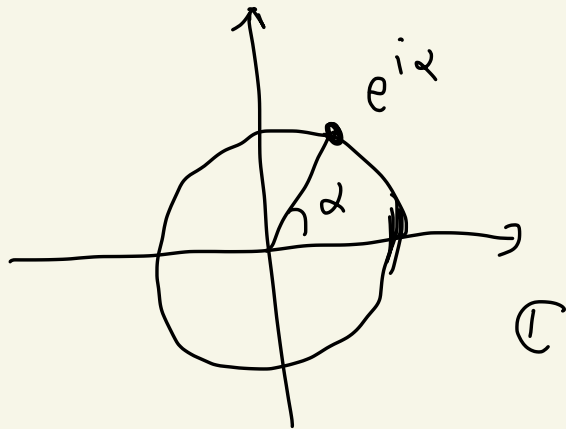
$$e = 2,71\dots$$

NUMERO DI
NEPERO

$$z = \rho e^{i\alpha}$$

RAPPR. ESPONENZIALE

$$e^{i\alpha}: \mathbb{R} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$



PER ESTENSIONE POTIAMO:

$$e^z = e^a \cdot e^{bi} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

$$z = a + ib \in \mathbb{C}$$

$$e^z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

ISOMORFISMO DI GRUPPI

RADICI n^{a} DI $w \in \mathbb{C}$

CERCHIAMO SOLUZIONI IN $\mathbb{C}$ DI $\boxed{z^n = w}$

$$w = |w| e^{i\alpha}$$

$$z = |z| e^{i\beta}$$

$$z^n = |z|^n e^{in\beta}$$

$$\alpha = \arg(w)$$

$$|z|^n e^{in\beta} = |w| e^{i[\arg(w) + 2k\pi]}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z| = |w|^{\frac{1}{n}} \\ \arg(z) = \frac{\arg(w)}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ e' } \\ \text{T.c. } \arg(z) \in [0, 2\pi)$$

$w \neq 0 \Rightarrow$ n SOLUZIONI
DISTINTE

CASO $w = 1$,

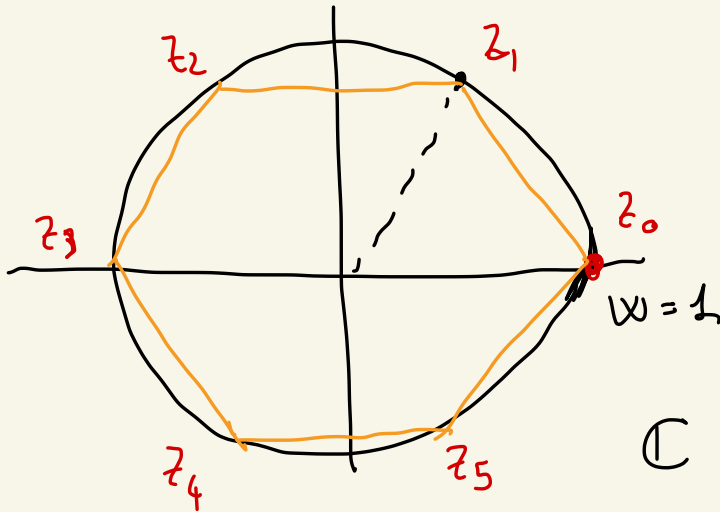
RADICI DELL'UNITÀ

$$z^n = 1$$

$$w = 1 \cdot e^{0i + 2k\pi i}$$

$$z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$$

$$k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$



PIÙ IN GENERALE, DATO

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad a_i \in \mathbb{C}$$

$\exists$ SEMPRE UNA SOLUZIONE $P(\bar{z}) = 0$.

IN PART. POSSIAMO SCRIVERE

$$P(z) = (z - \bar{z}) Q(z) \quad \deg Q = n-1 \quad \in$$

QUINDI PER ITERAZIONE POSSIAMO SCRIVERE

DIFFICILE

TEOREMA
FONDAMENTALE
DELL'ALGEBRA

$$P(z) = a_n (z-z_1) \dots (z-z_n)$$

$z_i \in \mathbb{C}$ soluzioni di $P(z) = 0$

POSSIBILNENTE COINCIDENTI

$$P(z) = a_n \prod_{j=1}^k (z-z_j)^{\alpha_j}$$

FATTORI IRREDUCIBILI
di P in $\mathbb{C}$

$$k \leq n \quad \alpha_j \in \mathbb{N} \text{ mult. di } z_j, \quad \sum_{j=1}^k \alpha_j = n$$

OSS: NON È VERO IN $\mathbb{R}$, DOVE PERO'
SI PUO' DECOMPORRE $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ CONE

$$P(x) = a_n \prod_{j=1}^K P_j(x)$$

$$P_j(x) = \begin{cases} x - x_j \\ x^2 + a_j x + b_j \end{cases}$$

$$\sum_j \deg P_j = n$$

DEF: SI DICE CHE $\mathbb{C}$ È ALGEBRICAMENTE

CHIUSO

OSS: $P(z) = 0$ $\deg P = 2$

$\subset \mathbb{C}$ $P(z) = az^2 + bz + c$ $a, b, c \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

OSS: IL TEOREMA NON VALE PER $P(z, \bar{z}) = 0$

ES: $z \cdot \bar{z} + 1 = 0$ NON HA SOLUZIONI

DISTANZA, INTERNI, TOPOLOGIA IN $\mathbb{R}$ E $\mathbb{R}^n$

COS'È UNA DISTANZA SU UN INSIEME E

$d: E \times E \rightarrow [0, +\infty)$ È UNA DISTANZA SE

- $d(x, x) = 0 \quad \forall x \in E$
- $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y$ SIMMETRICA
- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \quad \forall x, y, z$

DIS. TRIANGOLARE

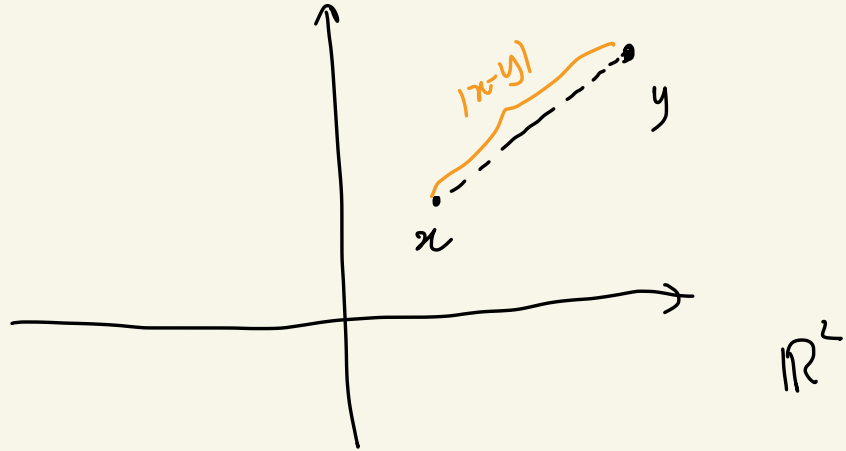
(E, d) SI DICE UNO

SPAZIO METRICO

ES: $(\mathbb{R}^n, l \cdot l)$

$(\mathbb{C}, l \cdot l)$

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$



ESERCIZIO:

$$(\mathbb{R}^n, |\cdot|_p) \quad p \in (0, +\infty)$$

$$d(x, y) = |x - y|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

È UNA DISTANZA SE $p \geq 1$

DATO (E, d) sp. METRICO

$$B_r(x) = \{ y \in E : d(x, y) < r \} \quad \text{SI DICE}$$

PALLA DI RAGGIO r CON CENTRO x

DEF: (E, d) sp. METRICO, $A \subseteq E$, $x \in A$

A SI DICE UN INTORNO DI x

SE $\exists r > 0$ T.C. $B_r(x) \subseteq A$

OSS: (E, d) s.n.

$E' \subseteq E \Rightarrow (E', d)$ s.n.

DEF: (E, d) s.n.

$A \subseteq E$

A si dice

APERTO

se A è interno di ogni suo punto,

cioè $\forall x \in A \quad \exists r > 0$ t.c. $B_r(x) \subseteq A$.

A si dice

CHIUSO

se $E \setminus A$ è APERTO.

PROP Detti $\mathcal{A} = \{ A \subseteq E : A \text{ APERTO} \}$

SI HA CHE

① $\emptyset, E \in \mathcal{A}$

② $\{A_i\}_{i \in I}$ FAMIGLIA DI APERTI, ANCHE INFINITA,

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$$

③ $A_1 \dots A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$

(NON È
VERA PER
INFINITE)

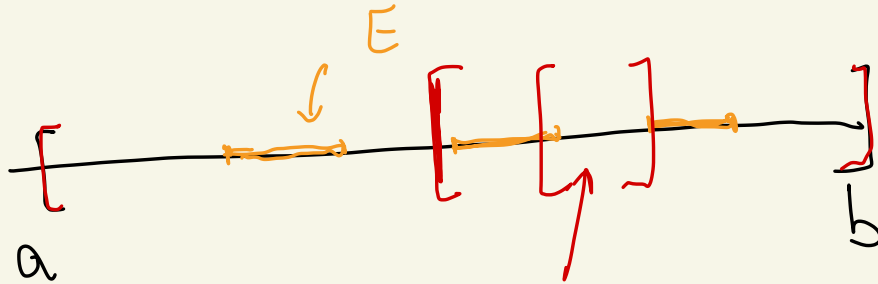


TEOREMA BOLZANO - WEIERSTRASS

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ LIMITATO E DI CARD. INFINITA

$\Rightarrow E$ HA PUNTI DI ACCUMULAZIONE.

DIM. $n = 1$



$$E \subseteq [a, b]$$

COSTRUIAMO ITERATIVAMENTE

$$[a_j, b_j] \subseteq [a_{j-1}, b_{j-1}]$$

$$a_0 = a, b_0 = b$$

$$|b_j - a_j| = \frac{b-a}{2^j}$$

T.C. $\bar{E} \cap [a_j, b_j]$ HA CARD. FINITA

NOTAZIONE: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ INT. CHIUSO
 $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ INT. APERTO

$$\bigcap_j [a_j, b_j] = \bar{x} \in \mathbb{R}$$

$$\bar{x} = \sup_j a_j = \inf_j b_j$$

SI HA CHE $\bar{x}$ È PT. DI ACC. PER E ,

INFATTI $\forall \varepsilon > 0 \quad [\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon] \supseteq [a_j, b_j]$

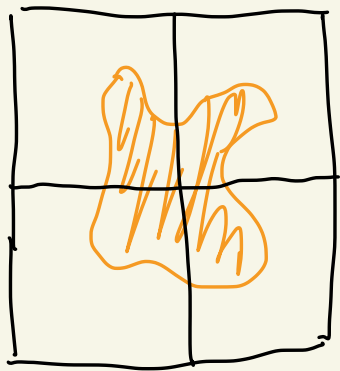
DEFINITIVAMENTE IN j , CIOÈ $\exists j_0$ T.C.

$$[a_j, b_j] \subseteq [\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon] \quad \forall j > j_0.$$

OSS: NON È DETTO CHE $\bar{x} \in E$.

$n > 1$

LA DIN. È ANALOGA



Q_0

$E \subseteq Q_0$. n -CUBO CHIUSO
DIVIDO Q_0 IN 2^n CUBI
DI LOTO NETA'
E SCELGO Q_1 T.C.

$E \cap Q_1$ HA CARD. INFINITA

$\Rightarrow Q_j \subseteq Q_{j-1}$, $L_j = \frac{L_0}{2^j}$ LUNGHEZZA DELLO
SPIGOLO DI Q_j ,

OSS: NON È VERO IN SPAZI METRICI GENERALI

ES: E CHIUSO $(\Leftrightarrow) \partial E \subseteq E$

E CHIUSO $(\Leftrightarrow) DE \subseteq E$ DOVE

$$DE = \{x : x \text{ PT. DI ACC. DI } E\}$$

(DERIVATO DI E)

$$\partial E = \emptyset \Leftrightarrow E \in \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$$

LIMITI DI FUNZIONI

E, F SPAZI METRICI

$f: E \setminus \{x_0\} \rightarrow F$ FUNZIONE

x_0 PT. DI ACC. DI E

SI DICE CHE f HA LIMITE $l \in F$ PER $x \rightarrow x_0$

SE $\forall V$ INT. DI l IN F $\exists U$ INT. DI x_0 IN E

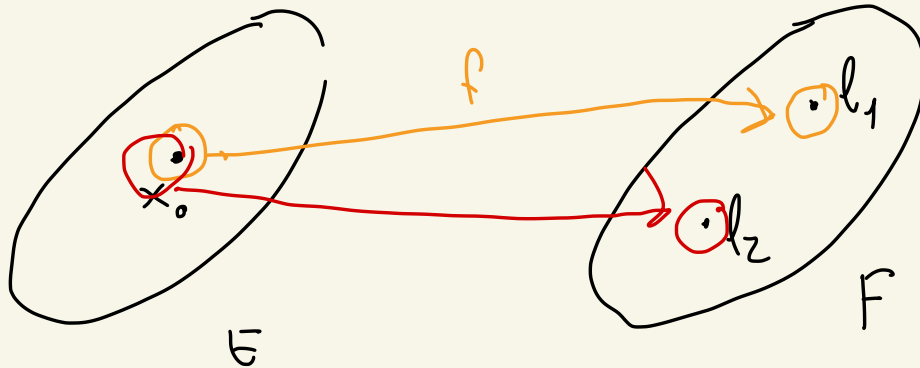
T.C. $f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V$

(POSSO PRENDERE
 U, V PALLE)

OSS: • IL LIMITE NON DIPENDE DA $f(x_0)$

• IL LIMITE l SI INDICA

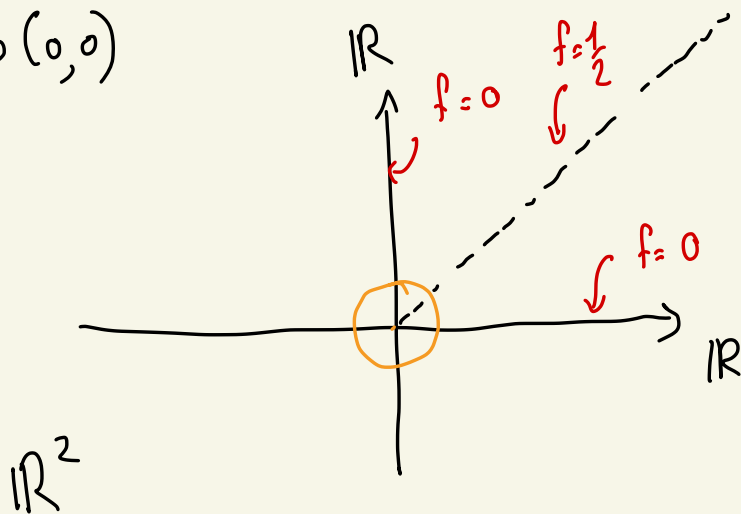
$l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ED È UNICO (SE ESISTE)



ESempi: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$\exists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$?

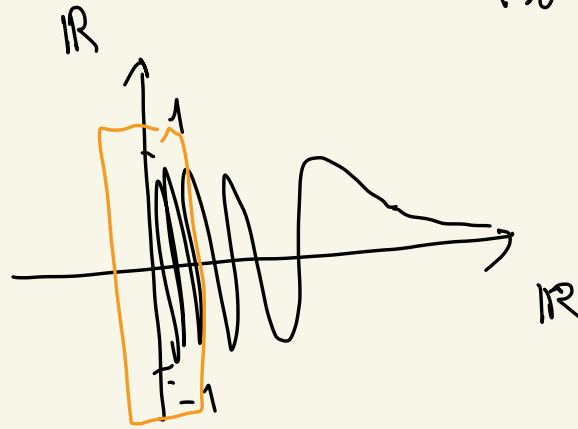


$$x=y \Rightarrow f(x, y) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

IL LIMITE
NON ESISTE

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

PER LE FUNZIONI $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ È CONVENIENTE

CONSIDERARE $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$
($\mathbb{R}$ ESTESO)

SI PUÒ ESTENDERE LA DEF. PONEENDO

U INT. DI $+\infty \iff \exists x \text{ t.c. } y \in U \ \forall y > x$

U INT. DI $-\infty \iff \exists x \text{ t.c. } y \in U \ \forall y < x$

$\Rightarrow$ SONO DEFINITI $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)$ E I LIMITI POSSO
ESSERE $\pm \infty$

ES: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x = \pm \infty$

PROPRIETÀ DEI LIMITI IN $\overline{\mathbb{R}}$

TEO (PERMANENZA DEL SEGNO)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0 \quad \left(\text{VA BENE } l = +\infty \right)$$

$$\Rightarrow \exists U \text{ INT. DI } x_0 \text{ T.C. } f(y) > 0 \quad \forall y \in U$$

PROPRIETÀ ALGEBRICHE

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m, \quad l, m \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = l \pm m$$

TRAMME
QUANDO OTTENIAMO
 $\infty - \infty$ $0 \cdot \infty$ $\infty + \infty$
(FORMA INDETERMINATA)

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$$

TRAMME QUANDO ABBIAMO $0 \cdot \infty$

CON LE CONVENZIONI: $\pm \infty \pm \infty = \pm \infty$, $(\pm \infty) \cdot (\pm \infty) = +\infty$
 $\pm \infty + c = \pm \infty$, $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

① $m \neq 0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$ TRAMME SE ABBIAMO $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$
LA FORMA IND.

CON LA CONVENZIONE

$$\frac{+\infty}{c} = \begin{cases} +\infty & c > 0 \\ -\infty & c < 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad m = 0, \quad \text{SE} \quad g(x) > 0 \quad \text{in} \quad U \setminus \{x_0\}$$

$$\in l \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & l > 0 \\ -\infty & l < 0 \end{cases}$$

SE $f(x) < 0$ SI INVERTONO (SEGNI)

OSS:

$$l = m = 0$$
$$l = m = \pm \infty$$

ABBIAO LA FORMA INDETERMINATA

$$\begin{array}{r} 8010 \\ 17 \overline{) 136170} \end{array}$$

OSS: I LIMITI DI FUNZIONE INCLUDONO I
LIMITI DI SUCCESSIONE

DEF:

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ È UNA SUCCESSIONE IN E

SE $\exists f: \mathbb{N} \rightarrow E$ i.e. $a_n = f(n)$
 $\mathbb{N}$
 $\mathbb{R}$

È DEFINITO $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in E \quad (\Leftrightarrow) \quad (x_0 = +\infty)$$

$$\forall V \text{ INT. DI } l \text{ IN } E \quad \exists U \text{ INT. DI } +\infty$$

$$\text{T.C. } f(n) \in V \quad \forall n \in U \cap \mathbb{N}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ T.C. } a_n \in V \quad \forall n > n_0.$$

← DEF: UNA SUCC. a_n T.C. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in E = \mathbb{R}^n$, $a_n \rightarrow l$,

SI DICE CONVERGENTE IN $\mathbb{R}^n$,

SE $E = \overline{\mathbb{R}}$ E $l = \pm \infty$, SI DICE DIVERGENTE

ES: $C \subseteq E$ sp. metrico è chiuso

$\Leftrightarrow \forall a_n$ succ. in C con $a_n \rightarrow x \in E$

$\Rightarrow x \in C$

→ CHIUSURA PER
SUCCESION)



PROP. $f, g : E \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 pt. di acc. di E
 $f \leq g$ in un intorno di x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f = l \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g = m \quad \Rightarrow \quad l \leq m.$$

DIM. Delta $h = g - f \geq 0$, si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} h = m - l$.

Supponiamo per assurdo $m - l < 0$
 $\Rightarrow$ (perm. segno) $h(x) < 0$ in un intorno di x_0
 $\Rightarrow g < f$ in un int. di x_0 ASSURDO.

TEO (2 CARABINIERI)

$$f, g, h : E \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \leq h \leq g \text{ in un intorno di } x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f = \lim_{x \rightarrow x_0} g = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} h = l.$$

DIN $l = +\infty \Rightarrow \forall V$ int. di $+\infty$ del tipo $(a, +\infty)$ $a \in \mathbb{R}$

$$\exists U \text{ int. di } x_0 \text{ t.c. } f(x) \in V \quad \forall x \in U$$

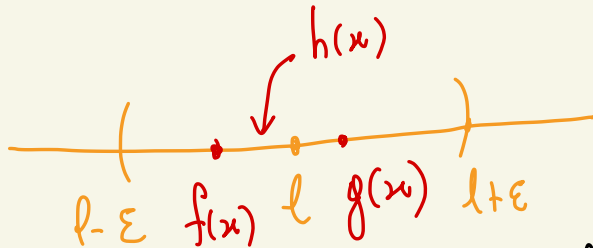
$$\text{cioè } f(x) > a \quad \forall x \in U \Rightarrow h(x) \geq f(x) > a \quad \forall x \in U$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = +\infty.$$

$l = -\infty$ si fa allo stesso modo.

$l \in \mathbb{R}. \quad \forall \varepsilon \exists U \text{ int. di } x_0 \text{ t.c.}$

$$f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \quad \text{e} \quad g(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \quad \forall x \in U$$



$$\Rightarrow h(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \quad \forall x \in U \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l.$$

COR: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$

DIN: $(\Leftarrow) \quad -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x$

$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$
 $0 \qquad \qquad \qquad 0$
 $\Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ per il teorema precedente.

$(\Rightarrow) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \forall \varepsilon \exists \cup \text{ int. di } x_0 \text{ t.c.}$

$f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \forall x \in \cup \Rightarrow |f(x)| \in [0, \varepsilon) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0.$

COR: $f, g: E \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$,

$|g(x)| \leq M$ in an int. Δ x_0

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$

DM: $-M \cdot |f(x)| \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot |f(x)|$ in an interval

$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} M \cdot |f(x)| = 0$

$\Rightarrow$ for if theorem (2 comb.) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

COMPATTEZZA

GENERAL TOPOLOGY

KELLEY

DEF: E sp. topologica

① E si dice COMPATTO se

per ogni RICOPRIMENTO APERTO di E,
cioè $\forall \{\Omega_i\}_{i \in I}$ FAMIGLIA DI APERTI t.c. $E \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$,

$\Rightarrow \exists \Omega_1 \dots \Omega_N$ t.c. $E \subseteq \bigcup_{n=1}^N \Omega_n$

↓
SOTTO RICOPRIMENTO FINITO

② E SI DICE NUMERABILMENTE COMPATTO
SE VALE LA PROPRIETÀ PRECEDENTE $\forall I$ NUMERABILE
($E \text{ CPT} \Rightarrow E \text{ num. CPT}$)

③ E SI DICE SEQUENZIALMENTE COMPATTO
SE $\forall x_n$ succ. in $E \quad \exists x_{n_k}$ SOTTOSUCCESSIONE
CONVERGENTE IN E , CIOÈ $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = x \in E$.

TEO: E sp. METRICO

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \textcircled{2} \Leftrightarrow \textcircled{3}.$$

OSS: IN GENERALE $\textcircled{1} \not\Rightarrow \textcircled{3}$, $\textcircled{3} \not\Rightarrow \textcircled{1}$
e $\textcircled{2} \not\Rightarrow \textcircled{1}$

PROP: E sp. metrico compatto, $F \subseteq E$ chiuso
 $\Rightarrow F$ sp. metrico compatto

Dim: $x_n \in F \subseteq E$, $\exists x_{n_k} \rightarrow x \in E \Rightarrow (F \text{ chiuso}) x \in F$.

PROP. E metrico, $F \subseteq E$ compatto $\Rightarrow F$ chiuso e limitato.

[F limitato significa $F \subseteq B_R(x_0)$ per qualche x_0 ed R]

DID. ① F chiuso. Se per assurdo F non è chiuso

$\Rightarrow \exists x_0$ pt. di acc. di F , $x_0 \notin F$.

$\exists x_n \rightarrow x_0$, $x_n \in F$.

$\Rightarrow (F \text{ cpt}) \quad \exists x_{n_k} \rightarrow \underline{x_1 \in F}$ ma $x_1 = x_0$, assurdo.

② F limitato. Per assurdo F non limitato

$\Rightarrow$ dato $x_0 \in F$, $F \not\subseteq B_n(x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Definiamo $x_1 \in F \setminus B_1(x_0)$,

" $x_2 \in F \setminus B_{d(x_0, x_1)+1}(x_0)$

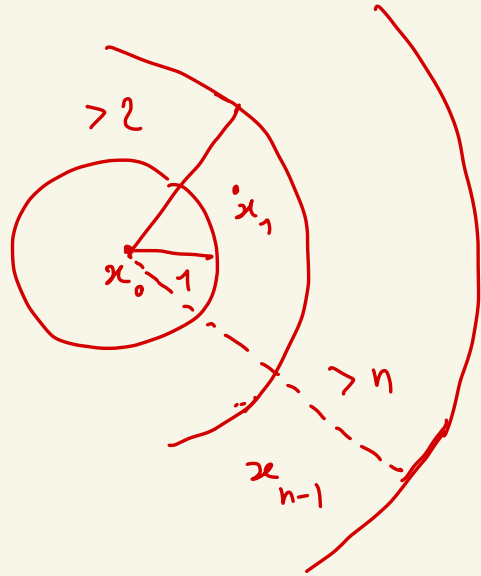
e quindi $x_n \in F \setminus B_{d(x_0, x_{n-1})+1}(x_0)$.

La succ. x_n verifica

$$d(x_n, x_m) \geq 1 \quad \forall n \neq m$$

lo stesso vale per x_{n_k} sotto succ.

$\Rightarrow x_{n_k}$ non può convergere.



OSS: In generale $\exists$ spazi E metrici e
sottoinsiemi $F \subseteq E$ chiusi, limitati, non compatti.

ES: $l_\infty = \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ successioni limitate} \}$

$$a_n \in \mathbb{R} \text{ e } |a_n| \leq M \quad \forall n$$

spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$$\|x\| = \sup_n |x_n|$$

NORMA DI $x \in l_\infty$

$$d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n| = \|x - y\|$$

DISTANZA su l_∞

↓
(VA VERIFICATO)

LE PALLE $\overline{B_R(x)} = \{y \in \ell_\infty : \|x-y\| \leq R\}$

SONO CHIUSI E LIMITATI NON COMPATTI.

BASTA PRENDERE, IN $B_1(0)$, LA SUCCESSIONE

$$x_n = (0, \dots, 1, \dots, 0, \dots)$$

↳ n^{a} posizione

TEO: $F \subseteq \mathbb{R}^n$ CHIUSO E LIMITATO $\Rightarrow F$ COMPATTO.

DIN. $x_n \in F$ successione

① $\exists x \in \overline{F}$ t.c. $x_n = x$ per infiniti n (frequentemente)

$\Rightarrow \exists x_{n_k} = x \quad \forall k$

② altrimenti, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è infinito e limitato (F limitato)

(B.W.)

$\Rightarrow \exists$ pt. di accumulazione $x \in \mathbb{R}^n$ per $\{x_n\}_n$

$\Rightarrow \exists$ sottosucc. $x_{n_k} \rightarrow x \in F$ (F chiuso).

TEO (B.W.) E sp. metrico, $F \subseteq E$ compatto infinito
 $\Rightarrow F$ ha un pt. di accumulazione, appartenente ad F .

DIM. Sia x_n succ. in F . t.c. $x_n \notin \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$

$\Rightarrow \exists x_{n_k} \rightarrow x \in F$, $x_{n_k} \neq x \forall k$

CPT. $\nearrow$

$\Rightarrow x$ è di accumulazione per F .

FUNZIONI CONTINUE

DEF. $f: E \rightarrow F$ E, F sp. metrici

$x_0 \in E$, f si dice CONTINUA in x_0 se

① x_0 è pt. isolato

② x_0 è di acc. e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \in F$.

ASS. Dalla def. di limite, f è CONT. in $x_0 \Leftrightarrow$
 $\forall V$ int. di $f(x_0) \exists U$ int. di x_0 t.c. $f(U) \subseteq V$.

DEF. f si dice CONTINUA su $E' \subseteq E$ se è continua $\forall x_0 \in E'$.

PROPRIETÀ ALGEBRICHE.

$f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUE IN $x_0 \Rightarrow$

⊙ $f \pm g$ cont. in x_0 ⊙ c.f. cont. in $x_0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$

⊙ $f \cdot g$ cont. in x_0

⊙ $g(x_0) \neq 0$, $f/g \in \mathbb{R}$ cont. in x_0 .

TEO (PERN. SEGNO) $f(x)$ cont. in x_0 con $f(x_0) > 0$
(resp. $f(x_0) < 0$)

$\Rightarrow \exists U$ int. di x_0 t.c. $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$)
 $\forall x \in U$.

OSS: L'INSIEME DELLE FUNZ. CONTINUE $f: E \rightarrow \mathbb{R}$
CHE SI INDICA CON $C(E)$ o $C^0(E)$,
È UNO SP. VETTORIALE SU $\mathbb{R}$ (DI DIM. INFINITA).

TEO (COMPOSIZIONE DI FUNZ. CONTINUE, SOSTITUZIONE NEI LIMITI)

$$f: E \setminus \{x_0\} \rightarrow F$$

E, F sp. metrici

x_0 pt. di acc.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$$

$$g: F \rightarrow G$$

CONTINUA IN y_0

$\Rightarrow$ la funzione composta $g \circ f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow G$

ha limite in x_0 e si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = g(y_0),$

$$\text{cioè } \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y).$$

(sostituzione $y = f(x)$).

Dim. Sia V int. di $g(y_0) \Rightarrow \exists U$ int. di y_0 t.c. $g(U) \subseteq V$

$\Rightarrow \exists W$ int. di x_0 t.c. $f(W) \subseteq U \Rightarrow$

$$(g \circ f)(W) \subseteq V.$$

COR: $f: E \rightarrow F$ cont. in x_0

$g: F \rightarrow G$ cont. in $f(x_0)$

$\Rightarrow g \circ f$ cont. in x_0



FUNZIONI CONTINUE IN SPAZI METRICI

PROP: $f: E \rightarrow F$ continua in $x_0 \in E \Leftrightarrow$
 $\forall x_n \xrightarrow[n]{} x_0$ si ha $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$

DIN: Per esercizi.

OSS: Non vale in uno spazio topologico generale.

TEO (WEIERSTRASS)

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ continua, E sp. metrico compatto

$\Rightarrow f$ ammette MASSIMO e MINIMO in E ,

cioè $\exists x_m, x_n \in E$ T.C.

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_n) \quad \forall x \in E.$$

OSS: Si applica a $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se E è chiuso e limitato.

DIM: Mostriamo che $\exists x_m$ di MINIMO.

$$\text{Sia } l = \inf_{x \in E} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

$$\text{e sia } y_n \in f(E) \text{ con } y_n \rightarrow l.$$

$$y_n = f(x_n), \quad x_n \in E.$$

$$E \text{ compatto} \Rightarrow \exists x_{n_k} \rightarrow x_m \in E.$$

$$f \text{ continua} \Rightarrow f(x_m) = \lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k y_{n_k} = l.$$

x_m è di MINIMO. $\left(x_m \text{ di massimo si trova allo stesso modo} \right)$

SUCCESIONI DI CAUCHY

E sp. metric, x_n successione in E

x_n si dice DI CAUCHY se $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon$ t.c.

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > n_\varepsilon.$$

OSS: $\odot x_n \rightarrow x \in E \Rightarrow x_n$ è di Cauchy

$$\left[\begin{array}{l} \forall \varepsilon \exists n_\varepsilon \text{ t.c. } d(x_n, x) < \varepsilon/2 \quad \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow \\ d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > n_\varepsilon \end{array} \right]$$

$\odot x_n$ DI CAUCHY $\Rightarrow x_n$ È LIMITATA

OSS: In generale ~~non~~ possono esistere succ. di Cauchy NON convergenti

ES: $E = \mathbb{Q}$ $x_n \in \mathbb{Q}$ $x_n \rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ è di CAUCHY

PROP: $E = \mathbb{R}^n$, x_n di C. $\Rightarrow x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$.

DIN: x_n di C. $\Rightarrow \{x_n\}_n$ È LIMITATO

$\Rightarrow$ ① $\{x_n\} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N\}$ FINITO

DIC. $\leftarrow \Rightarrow x_n = \bar{x}_i \quad \forall n$ abb. grande $\Rightarrow x_n \rightarrow \bar{x}_i$

② $\{x_n\}$ INFINITO $\Rightarrow \exists x$ di ACCUMULATIONE

$\Rightarrow \exists x_n \xrightarrow{n} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{n} x$
 $\downarrow$
di CAUCHY

Infatti $\forall \varepsilon \exists n_\varepsilon$ t.c. $|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_\varepsilon$
 $\exists K_\varepsilon$ t.c. $|x_{n_k} - x| < \varepsilon \quad \forall K > K_\varepsilon$

$$\Rightarrow |x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < 2\varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$$

dove scegli $K > K_\varepsilon$ t.c. $n_k > n_\varepsilon$.

DEF: Si dice che E è COMPLETO
 se tutte le succ. di Cauchy in E convergono.

OSS: $\mathbb{R}^n$ è completo, $\mathbb{Q}$ non è completo,
 E sp. metrico completo $\Rightarrow E$ è completo

OSS: $\exists$ CAMPI ORDINATI E COMPLETI (IN QUESTO SENSO)
 $\neq \mathbb{R}$ (ES: $\mathbb{R}(x)$)

PERO' $\mathbb{R}$ E' L'UNICO CAMPO ORDINATO, COMPLETO
E ARCHINEDEO

OSS: UN ALTRO MODO PER COSTRUIRE $\mathbb{R}$ E'

$$\mathbb{R} = \left\{ x_n \in \mathbb{Q} \text{ DI CAUCHY} \right\} / \sim$$

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \text{ se } (x_n - y_n) \xrightarrow{n} 0.$$

ES: $E = C^0([0,1]) := \left\{ f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ CONTINUE} \right\}$

spazio vettoriale

$$d(f, g) = \max_{[0,1]} |f - g| \quad \text{DISTANZA}$$

$\Rightarrow E$ sp. metric completo (VA DIMOSTRATO)

DEF: E sp. vett. $(\text{su } \mathbb{R})$ è NORMATO

se $\exists \|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$\odot \quad \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E$$

$$\odot \quad \|x\| = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x = 0$$

$$\odot \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad e \quad x \in E$$

$$\odot \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E \quad (\text{SUBADDITIVITÀ})$$

OSS: E sp. NORMATO è METRICO ponendo $d(x, y) = \|x - y\|$

DEF: E' SP. NORMATO E' UNO SPAZIO DI BANACH
SE, CONE SP. METRICO, E E' COMPLETO.

ES: $\mathbb{R}^n$, $C^0([0,1])$, $C^0(K)$ con $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto
SONO SPAZI DI BANACH.

SUCCESIONI IN $\mathbb{R}$, LIMITE NOTEVOLE

ORDINI DI INFINITO.

CRITERIO DEL RAPPORTO: $a_n > 0$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n} x \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0 \\ x > 1 \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty \end{cases}$$

SEGUE DAL CONFRONTO DI a_n CON $(x \pm \varepsilon)^n$.

E DAL FATTO CHE $x^n \rightarrow 0$ PER $x \in [0, 1)$

E $x^n \rightarrow +\infty$ PER $x > 1$.

VERIFICA
PER ESERCIZIO

APPLICATION 1

$$x_n = \frac{n^\alpha}{a^n}$$

$$\alpha > 0$$

$$a > 1$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{a^n}{a^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{a} < 1$$

$$\Rightarrow x_n \rightarrow 0$$

$$x_n = \frac{a^n}{n!}$$

$$a > 1$$

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

$$n! \rightarrow +\infty$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$$

$$x_n = \frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$$



$$\left[\begin{array}{l} \text{quindi, per } n \text{ grande,} \\ n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n \\ \alpha > 0, a > 1 \end{array} \right]$$

⊛

$$x_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1) n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

DOVG

$$e = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71...$$

NUMERO DI NEPERO

VERIFICHIANO CHE $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ CONVERGE

PROP: X_n MONOTONA, CIOE' $x_{n+1} \geq x_n \forall n$
o $x_{n+1} \leq x_n \forall n$,

X_n LIMITATA $\Rightarrow x_n$ CONVERGE

DIN: $\{x_n\}$ HA UN PUNTO DI ACCUMULAZ.

x_n CRESCENTE, L'UNICO PUNTO DI ACC. E $\sup_x x_n$

$\Rightarrow \exists x_{n_k} \rightarrow x = \sup x_n \Rightarrow x_n \rightarrow x$

VICEVERSA, x_n DECRESCENTE $\Rightarrow x_n \rightarrow \inf_n x_n$

PROP. $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ È CRESCENTE E LIMITATA.

(IN PARTICOLARE CONVERGE AD $e > 2$)

Din. ① x_n CRESCENTE.

$$x_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k! \cdot n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$$

$$X_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) > \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right)$$

$$> \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) = X_n$$

② X_n LIMITATA, IN PART. $X_n < 3 \quad \forall n$

$$X_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \underbrace{\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)}_{< 1} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \stackrel{\textcircled{1}}{\leq} 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j}$$

OSSERVIANO CHE

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \right. \quad k! \geq 2^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \forall x \neq 1$$

DA RICORDARE

$$X_n < 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} \stackrel{(2)}{=} 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3. \quad \forall n.$$

RESTANO DA VEDERE $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$.

$\textcircled{1}$: PER INDUZIONE $k! \geq 2^{k-1}$

- $k=1$ $1 \geq 1$ ok

- $k \geq 2$ supp. $(k-1)! \geq 2^{k-2} \Rightarrow$
 $k! \geq 2 \cdot (k-1)! \geq 2 \cdot 2^{k-2} = 2^{k-1}$

② SEGUE DALLA FORMULA

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b) \left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1} \right) \\ &= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k \end{aligned}$$

PONENDO $a=1$, $b=x$.

OSS: DALLA DISUG. $x_n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ SI HA

$$e \leq \lim_n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \stackrel{\text{DEF.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}, \quad \text{IN REALTÀ SI HA}$$

PROPRIO

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$



LIMITI DI SUCCESSIONI E FUNZIONI

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \stackrel{\text{DEF}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \stackrel{\text{DEF}}{=} e \in \mathbb{R}$$

$e = 2,71\dots$

OSS: Dell'uguaglianza $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

si può vedere (va dimostrato) $e \notin \mathbb{Q}$, cioè $e \neq \frac{p}{q} \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}$

$$\textcircled{1} \lim_n \frac{n!}{n^n} = 0 \quad \text{per criterio del rapporto}$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n n!}{n^n} \quad x > 0$$

$\searrow a_n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1} \cancel{(n+1)!}}{x^n \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n^n}}{\cancel{(n+1)^{n+1}}} = \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{x}{e}$$

$$\Rightarrow \lim_n \frac{x^n n!}{n^n} = \begin{cases} \infty & x > e \\ 0 & x \in (0, e) \end{cases}$$

$x = e ?$

VALE LA FORMULA DI STIRLING PER $n!$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

VA DIMOSTRATA

DOVE $a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow \infty$ se $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$

$$\Rightarrow \lim_n \frac{e^n n!}{n^n} \sim \lim_n \sqrt{2\pi n} = +\infty$$

$$\lim_n \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_n \frac{a_N n^N}{b_M n^M}$$

$$= \frac{a_N}{b_M} \lim_n n^{N-M}$$

$$\therefore \begin{cases} \text{seg} \left(\frac{a_N}{b_M} \right) \infty & N > M \\ \frac{a_N}{b_M} & N = M \\ 0 & N < M \end{cases}$$

P, Q polinomi

$$P(n) = \sum_{k=0}^N a_k n^k$$

$$Q(n) = \sum_{k=0}^M b_k n^k$$

$$N = \deg P, \quad M = \deg Q$$

INFATTI

$$P(n) = a_n n^N \left(1 + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{a_n} \frac{1}{n^{N-k}} \right)$$

$$Q(n) = b_n n^M \left(1 + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{b_k}{b_n} \frac{1}{n^{M-k}} \right)$$

$$\lim_n \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_n \frac{a_n n^N}{b_n n^M} \cdot \lim_n \underbrace{\frac{1 + \sum_k \frac{a_k}{a_n} \frac{1}{n^{N-k}}}{1 + \sum \frac{b_k}{b_n} \frac{1}{n^{M-k}}}}_{=1}$$

0

0

NEI LIMITI CONTA SOLO IL TERMINE
CHE VA A ∞ PIU' VELOCEMENTE
O A 0 PIU' LENTAMENTE.

$$\textcircled{c} \lim_n a^{\frac{1}{n}}$$

$$a > 0$$

$$a=1 \quad a^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$a > 1 \quad a^{\frac{1}{n}} \text{ DECRESCENTE} \quad a^{\frac{1}{n}} > 1 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \exists \lim_n a^{\frac{1}{n}} = l \geq 1 \quad \text{e si ha } a^{\frac{1}{n}} \geq l \quad \forall n$$

$$a \geq l^n \quad \forall n \Rightarrow l=1$$

ANALOGAMENTE, SE $a \in (0, 1)$,

$a^{\frac{1}{n}}$ È CRESCENTE, $a^{\frac{1}{n}} < 1 \quad \forall n$ e $\lim_n a^{\frac{1}{n}} = 1$.

UTILIZZANDO LA MONOTONIA, GLI STESSI
RISULTATI VALGONO PER LIMITI DI FUNZIONI

IN PARTICOLARE

$$x^\alpha \ll a^x \ll x^\alpha \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

$\alpha > 0 \quad a > 1$

CIOÈ:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{a^x} = 0$$

$$\forall a > 0 \quad a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^n} = 0$$

$$\forall a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \frac{a_N}{b_M} \cdot \infty & N > M \\ \frac{a_N}{b_M} & N = M \\ 0 & N < M \end{cases}$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$$

$$Q(x) = \sum_{k=0}^M b_k x^k$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \left[\left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1}\right)^{\lfloor x \rfloor} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)^{\lfloor x \rfloor + 1} \right]$$

$\rightarrow$ PARTE INTERA DI x

$\swarrow$ e $\downarrow$ e $\swarrow$ e

SINBOLI DI LANDAU

NOTAZIONE UTILE NEI LIMITI

DEF: DATA $f(x)$ T.C. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$,
o piccolo

DEF. $\leftarrow o(f)$ PER $x \rightarrow x_0$ CONE

L'INSIEME DELLE FUNZIONI $g(x)$ T.C. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$
(O UNA GENERICA FUNZIONE)

ES: $x_0 = 0$ $f(x) = x^\alpha$ $\alpha \geq 0$

$g \in o(f)$ o $g = o(f)$ È UNA FUNZIONE CHE
VA A ZERO PIÙ RAPID. DI x^α

IN PART. $x^\beta = o(x^\alpha)$ se $\beta > \alpha$.

SE INVECE $x_0 = +\infty \Rightarrow x^\beta = o(x^\alpha)$ se $\beta < \alpha$

IN PART. $P(x) \in \mathbb{C}$ UN POLINOMIO

$$P(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k = a_N x^N + o(x^N) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

$$P(x) = a_0 + o(1) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

DEF: $O(f)$, per $x \rightarrow x_0$, è l'insieme delle funzioni

↓
O GRANDE

f t.c. $\exists C > 0$ e U int. di x_0

t.c. $|f(x)| \leq C |f(x)| \quad \forall x \in U$
 $x \neq x_0$

IN PART. $O(f) \subseteq O(f)$

ES: $x^\beta = O(x^\alpha) \begin{cases} \text{per } x \rightarrow 0 & (\Rightarrow) \beta \geq \alpha \\ \text{per } x \rightarrow \infty & (\Rightarrow) \beta \leq \alpha \end{cases}$

$$P(x) = O(x^N) = a_N x^N + O(x^{N-1})$$

per $x \rightarrow \infty$

VALGONO LE SEGUENTI REGOLE

$$f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$$

$$O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$$

$$o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$$

$$o(f) + o(g) = o(\max(|f|, |g|))$$

$$O(f) + O(g) = O(\max(|f|, |g|))$$

ES: $o(x^\alpha) \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$

$$o(x^\alpha) + o(x^\beta) = \begin{cases} o(x^\alpha) \\ o(x^\beta) \end{cases} \quad \alpha \geq \beta$$

per $x \rightarrow \infty$

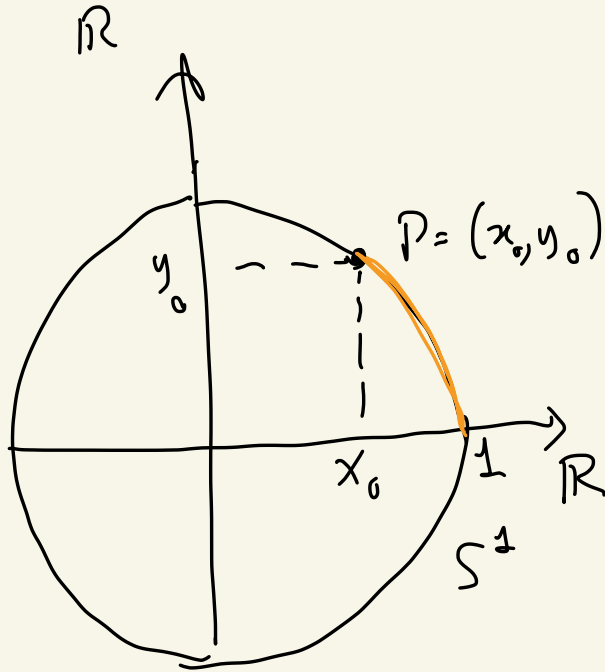
per $x \rightarrow 0$

OSS: $f_{+o}(f) \sim f$ per $x \rightarrow x_0$

$$\frac{f_{+o}(f)}{g_{+o}(g)} \sim \frac{f}{g} \text{ per } x \rightarrow x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_{+o}(f)}{g_{+o}(g)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}$$

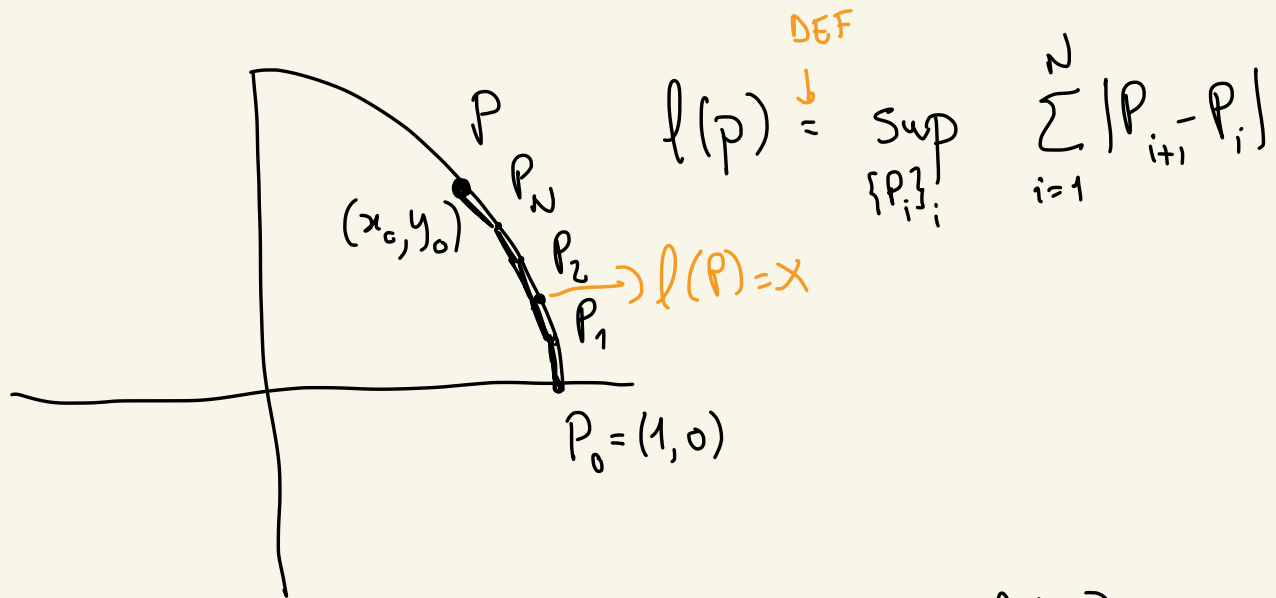
LIMITI DI FUNZIONI TRIGONOMETRICHE



$$S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

$l(P) =$ lunghezza dell'arco
tra $(1, 0)$ e P



DATO $x \in [0, 2\pi)$ $\exists!$ $P \in S^1$ t.c. $l(P) = x$

$l(P) = (x_0, y_0)$ DEFINIAMO

$\sin(x) = y_0$ $\in$ $\cos(y) = x_0$

ESTENDIAMO $\sin(x)$ E $\cos(x)$ A FUNZIONI

2π -PERIODICHE SU $\mathbb{R}$,

CIOÈ $\sin(x) \stackrel{\text{Def}}{=} \sin(x_0)$ DOVE $x_0 \in [0, 2\pi)$
È T.C. $x = x_0 + 2k\pi$
 $k \in \mathbb{Z}$

È LO STESSO PER $\cos(x)$.

DEF. ALTERNATIVA

DEF. LA FUNZIONE $e^{ix} : \mathbb{R} \rightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z|=1\}$
OMOMORFISMO DI GRUPPI

$$\Rightarrow \cos(x) \stackrel{\text{DEF}}{=} \operatorname{Re}(e^{ix})$$

$$\sin(x) \stackrel{\text{DEF}}{=} \operatorname{Im}(e^{ix})$$

DOVE e^{ix} È:

- ① L'OMOMORFISMO DI PERIODO MINIMO 2π
con $\operatorname{Im}(e^i) > 0$

$$\textcircled{2} \quad e^{ix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{ix}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$$

↑
LIMITE IN $\mathbb{C}$

DALLA DEFINIZIONE OTTENIAMO

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$$

$\Rightarrow \sin(x)$ e $\cos(x)$ SONO FUNZIONI CONTINUE

INFATTI $\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x)$

$$\xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \sin(x)$$

$$\cos(x+h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \cos(x)$$

SI HA INOLTRE

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

ciò $\sin(x) = x + o(x)$

QUESTO SEGUE DALLE DISUG.

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$x \in [0, \pi/2)$$

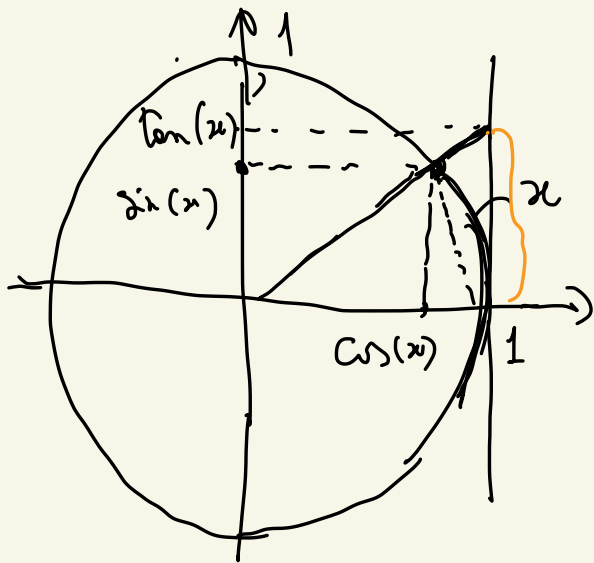
VA DIMOSTRATA

DIVIDENDO PER $\sin(x)$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

$\downarrow x \rightarrow 0$ $\downarrow x \rightarrow 0$

1 1



CONSEQUENZE

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = x + o(x)$$

$$1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

INFATTI

$\approx \sin^2(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2 (1 + \cos(x))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(x)}{x} \right]^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)} = \frac{1}{2}$$



LIMITI E FUNZIONI CONTINUE

LIMITE DESTRO E SINISTRO

$$f: E \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subseteq \mathbb{R} \quad x_0 \text{ pt. di acc. di } E$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Big|_{E \cap (x_0, +\infty)}$$

↓
LIMITE DESTRO

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Big|_{E \cap (-\infty, x_0)}$$

↓
LIMITE SINISTRO

OSS: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f = l \quad (\Leftrightarrow) \quad \forall V \text{ int. di } l \quad \exists \varepsilon > 0$
 t.c. $f(x) \in V \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$

↓
 INT. DESTRO
 DI x_0

ANALOGAMENTE PER $x \rightarrow x_0^-$

OSS: Se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f = l \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f = l$

NON E' VERO IL VICEVERSA

ES: $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ $\left(f \text{ NOT } \in \text{ CONT. IN } x=0 \right)$

$\exists \lim_{x \rightarrow 0^+} f = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f = -1$

PROP: $S \in \exists \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = l^\pm \Leftrightarrow l^- = l^+$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$

Def: Sia $l := l^+ = l^-$ $\forall V$ int. di l

$\uparrow$
(= PER DEFINIZIONE)

$\exists \varepsilon^\pm$ t.c. $f(x) \in V \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon^-, x_0) \text{ e } \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon^+)$

$\Rightarrow f(x) \in V \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$

Dove $\varepsilon = \min(\varepsilon^-, \varepsilon^+).$

PROP. $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ MONOTONICA,

$$\begin{aligned} \text{cioè } x \leq y &\Rightarrow f(x) \leq f(y) && (\text{CRESCENTE}) \\ x \leq y &\Rightarrow f(x) \geq f(y) && (\text{DECRESCENTE}), \end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall x_0$ (DEVE ESSERE PUNTO DI ACC.)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = f(x_0^\pm) \quad \in$$

$$f \text{ CRESC.} \Rightarrow f(x_0^+) \geq f(x_0^-)$$

$$f \text{ DECRESC.} \Rightarrow f(x_0^+) \leq f(x_0^-)$$

DIN. $E_n(-\infty, x_0)$ e x_0 PT. DI ACC. DI $E_n(-\infty, x_0)$

$$\Rightarrow x_0 = \sup E$$

$$f \text{ CRESCENTE} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f \Big|_{E_n(-\infty, x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f = \sup_{x \in E_n(-\infty, x_0)} f(x)$$

$$f \text{ DECRESC.} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f = \inf_{x \in E_n(-\infty, x_0)} f(x)$$

LA STESSA COSA SI HA PER $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

DISCONTINUITÀ DI f

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{disc}(f) = \{x \in E \text{ t.c. } f \text{ non è cont. in } x\}$$

$$x \in \text{disc}(f)$$

⊙ f HA UNA DISC. ELIMINABILE

$$\text{se } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f \neq f(x_0)$$

ES: $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$

⊙ f HA UNA DISC. A SALTO (PRIMA SPECIE)

$$\text{se } \exists \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = l^\pm \text{ ma } l^+ \neq l^-$$

ES: $f(x) = \text{sgn}(x)$

OSS: LE f MONOTONE
HANNO SOLO DIS. A SALTO

① f HA UNA DISC. DI II SPECIE SE

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f = l^\pm \in \overline{\mathbb{R}}, \quad l^+ \neq l^- \text{ E ALMENO UNO DEI}$
 $\text{DUE E' } \pm \infty$

ES: $f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1/x & x \neq 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f = \pm \infty$

② f HA UNA DISC. DI III SPECIE

SE $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f \quad \text{O} \quad \nexists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f$

ES: $f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \end{cases}$



ES: $\odot f(x) = \chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ FUNZIONE DI DIRICHLET

$\text{disc}(f) = \mathbb{R}$ e NON ESISTE NESSUN LIMITE

$\odot f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, (p, q) = 1 \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

TUTTE LE DISC. SONO ELIMINABILI

$\varepsilon \quad \text{disc}(f) = \mathbb{Q} \quad \bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \text{DEVO VEDERE CHE } \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f = 0$

cioè $\forall N \exists \delta \text{ T.C. } (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \cap \left\{ \frac{q}{q} : q \leq N \right\} = \emptyset \Rightarrow f(x) < \frac{1}{N}$
 $\forall x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$

① $\exists f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ CRESCENTE E DISC. SOLO SU $\mathbb{Q}$
(LE DISC. SONO TUTTE A SALTO)

$$f(x) = \sum_n \frac{1}{2^n} \chi_{(q_n, +\infty)} , \quad \chi_{(q_n, +\infty)}(x) = \begin{cases} 1 & x > q_n \\ 0 & x \leq q_n \end{cases}$$

$$\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$f \text{ CRESCENTE} \quad 0 \leq f(x) \leq \sum_n \frac{1}{2^n} = 1 \quad \forall x$$

$$\text{disc}(f) = \mathbb{Q}$$

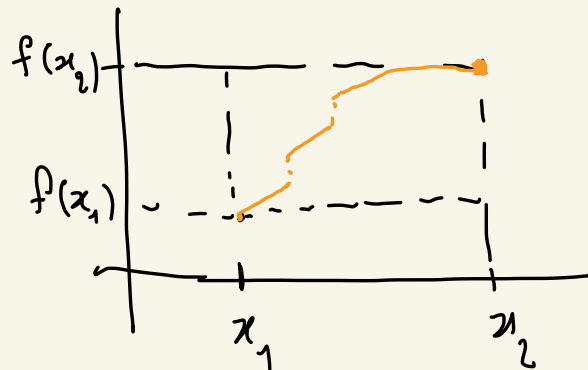
OSS: f MONOTONA $\Rightarrow \text{disc}(f)$ E' NUMERABILE.

INFATTI SIA $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ CRESCENTE E

SIANO $x_1 < x_2$ $x_1, x_2 \in E$

$$\Rightarrow \sum_{x \in \text{disc}(f) \cap [x_1, x_2]} [f(x^+) - f(x^-)] \leq f(x_2) - f(x_1) < +\infty$$

$\Rightarrow \text{disc}(f) \cap [x_1, x_2]$
E' NUMERABILE



ABBIAMO USATO:

$$\sum_{i \in I} a_i < +\infty$$

$a_i > 0 \quad \forall i \in I \quad \Rightarrow I \text{ È FINITO • NUMERABILE}$

INFATTI $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad I_n = \left\{ i \text{ t.c. } a_i \geq \frac{1}{n} \right\}$

$$I_n \subseteq I_{n+1}$$

$$\frac{1}{n} |I_n| \leq \sum_{i \in I_n} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i < +\infty \quad \Rightarrow |I_n| < +\infty \quad \forall n$$

$\Rightarrow I \text{ È NUMERABILE}$

DEF: $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 PT. DI ACC. DI E

DICIAMO CHE f HA LIMITE SUPERIORE IN x_0
UGUALE A $l \in \mathbb{R}$, E SCRIVIAMO $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$,

$$\forall \varepsilon \begin{cases} l = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \\ l = +\infty \Rightarrow \exists x_n \rightarrow x_0 \text{ t.c. } \lim_n f(x_n) = +\infty \\ l \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x_n \rightarrow x_0 \text{ t.c. } \lim_n f(x_n) = l \\ \forall \varepsilon \exists U \text{ INT. DI } x_0 \text{ t.c. } f(x) < l + \varepsilon \\ \forall x \in U \end{cases}$$

DEF. ANALOGA PER $\liminf_{x \rightarrow x_0} f$

SI HA:

$\forall x_0 \in E$ PT. DI ACC. $\exists \liminf_{x \rightarrow x_0} f$ e $\limsup_{x \rightarrow x_0} f$

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f = \inf_{U \text{ int. di } x_0} \sup_{x \in U \setminus \{x_0\}} f(x) \geq$$

$$\geq \sup_U \inf_{x \in U \setminus \{x_0\}} f(x) = \liminf_{x \rightarrow x_0} f$$

OSS: f HA LITE IN $x_0 \Leftrightarrow \liminf_{x \rightarrow x_0} f = \limsup_{x \rightarrow x_0} f$

OSS: DATE f, g SI HA

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} (f + g) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f + \limsup_{x \rightarrow x_0} g$$

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} (f + g) \geq \liminf_{x \rightarrow x_0} f + \liminf_{x \rightarrow x_0} g$$

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} (-f) = - \liminf_{x \rightarrow x_0} f$$

ES: $a_n = (-1)^n$

$$\limsup_n a_n = 1 > \liminf_n a_n = -1$$

$$b_n = (-1)^{n+1}$$

$$a_n + b_n = 0$$

$$0 = \limsup_n (a_n + b_n) < \limsup_n a_n + \limsup_n b_n = 2$$

DEF: $f: E \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in E$

$$\text{osc}(f)(x_0) = \begin{cases} 0 & x_0 \in \text{ISOLATO} \\ \limsup_{x \rightarrow x_0} f - \liminf_{x \rightarrow x_0} f \geq 0 & x_0 \in \text{PT. DI ACC.} \end{cases}$$

OSS: $\text{osc}(f)(x_0) > 0 \quad (\Rightarrow) \quad x_0 \in \text{disc}(f)$

$$\text{disc}(f) = \bigcup_N E_N \quad E_N = \left\{ x \in \text{disc}(f) : \text{osc}(f)(x) \geq \frac{1}{N} \right\}$$

QUESTI INSIEMI E_N SONO CHIUSI (DA VERIFICARE)

$\Rightarrow \text{disc}(f)$ È UNIONE NUMERABILE DI INSIEMI CHIUSI

(NON TUTTI I SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}$
HANNO QUESTA PROPRIETÀ)

DOMANDA: $\exists f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T.C. $\text{disc}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

NO, PERCHÉ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ NON SI SCRIVONO
COME $\bigcup$ NUM. DI CHIUSI.

INFATTI, SE $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_n E_n$ E_n CHIUSI

AUREI $\text{int}(E_n) \subseteq \text{int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset \quad \forall n$

$\Rightarrow$ AGGIUNGENDO I PUNTI RAZIONALI

AUREI CHE $\mathbb{R} = \bigcup_n F_n$ F_n CHIUSO, $\text{int}(F_n) = \emptyset$.

TEOREMA (BAIRE)

E SP. METRICO COMPLETO,

$F_n \subseteq E$ CHIUSI A PARTE INTERNA VUOTA,

$$F = \bigcup_n F_n \Rightarrow \text{int}(F) = \emptyset$$

IN PARTICOLARE $F \neq E$



FUNZIONI CONTINUE

TEOREMA DEGLI ZERI:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA

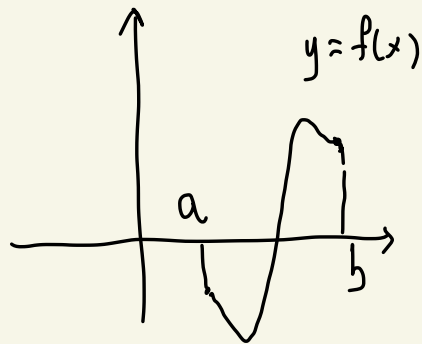
$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad (\text{SEGNI OPPOSTI})$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) \text{ t.c. } f(x_0) = 0.$$

DIN: SUPP. $f(a) < 0$ E SIA $x_0 = \sup \{x \text{ t.c. } f(x) < 0\}$,

$\Rightarrow f(x_0) = 0$. INFATTI, SE FOSSE $f(x_0) < 0 \quad \exists \varepsilon \text{ t.c.}$

$f(x) < 0$ IN $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ ASSURDO.



ANALOGAMENTE, $f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ IN $(x_0 - \varepsilon, x_0]$

ASSURDO.

COR (VALORI INTERNI):

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA $\Rightarrow$

$$\odot f([a, b]) \supseteq [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))]$$

$$\odot f([a, b]) = \left[\min_{[a, b]} f(x), \max_{[a, b]} f(x) \right]$$

GENERALIZZAZIONE

DEF: E SP. METRICO (VA BENE TOPOLOGICO) E :

SCONNESSO SE $\exists A, B \subseteq E$ APERTI NON VUOTI

T.c. $A \cap B = \emptyset$ e $E = A \cup B$

CONNESSO SE NON E SCONNESSO

CONNESSO PER ARCHI

$\exists \gamma: [a, b] \rightarrow E$ CONTINUA T.c.

$$\gamma(a) = x, \quad \gamma(b) = y$$



OSS: $E \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$

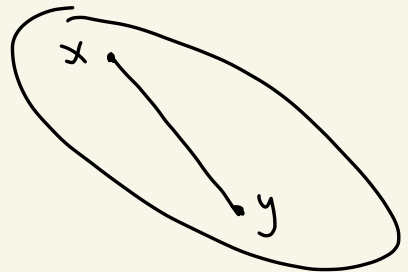
E CONNESSO $(\Rightarrow)$ E CONNESSO PER ARCHI

$(\Leftrightarrow)$ E INTERVALLO, SEMIRETTA o $\mathbb{R}$

OSS: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ CONNESSO, CIOÈ

$\forall x, y \in E \quad [x, y] = \{ \lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0, 1] \} \subseteq E,$

CONNESSO PER ARCHI.



TEO: $f: E \rightarrow F$ CONTINUA, E, F SPAZI METRICI

① E CONNESSO $\Rightarrow f(E)$ CONNESSO

② E CONNESSO PER ARCHI $\Rightarrow f(E)$ CONN. PER ARCHI

D17. ① Supp. $f(E)$ SCONNESSO, CIOÈ

$f(E) \subseteq A \cup B$ A, B APERTI IN F

$f(E) \cap A \neq \emptyset$, $f(E) \cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow E = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \Rightarrow E$ SCONNESSO

↑
APERTO

ASSURDO

② E conn. per archi,

$y_1, y_2 \in f(E)$, siano $x_1, x_2 \in E$ t.c.

$y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2) \Rightarrow \exists \gamma: [0,1] \rightarrow E$ cont.

$\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2 \Rightarrow$

$\exists \tilde{\gamma}: [0,1] \rightarrow f(E) \quad \tilde{\gamma}(t) = f(\gamma(t)) \quad \text{cont.}$

$\tilde{\gamma}(0) = y_1 \quad \tilde{\gamma}(1) = y_2$

$\Rightarrow f(E)$ conn. per archi

PROP

E CONN PER ARCHI $\Rightarrow E$ CONNESSO

DIN

SUPP E SCONNESSO, $E = A \cup B$

$\exists$ SIANO $x \in A$, $y \in B$ $\exists \gamma: [0,1] \rightarrow E$ CONT.

CON $\gamma(0) = x$ E $\gamma(1) = y$.

$\Rightarrow \gamma([0,1]) \subseteq A \cup B = E$

$\Rightarrow \gamma([0,1])$ $\hat{=}$ SCONNESSO

ASSURDO POICHÉ $[0,1]$ $\hat{=}$ CONNESSO E γ $\hat{=}$ CONT.

SONO EQUIVALENTI?

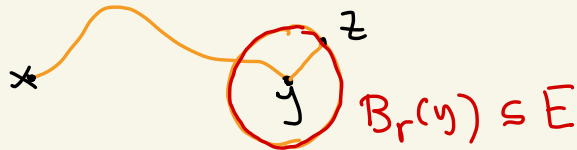
OSS: E CONVESSO $\Rightarrow \begin{cases} E \text{ CONN. PER ARCHI} \\ E \text{ CONNESSO} \end{cases}$

PROP: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO CONNESSO

$\Rightarrow E$ CONNESSO PER ARCHI

DIN $x \in \bar{E}$ $A = \left\{ y \in E \text{ t.c. } \exists \gamma: [0,1] \rightarrow E \text{ CONT.} \right\}$
 $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$

$\Rightarrow A$ APERTO



$E \setminus A$ APERTO $\Rightarrow E = A \cup (E \setminus A)$ CONNESSO

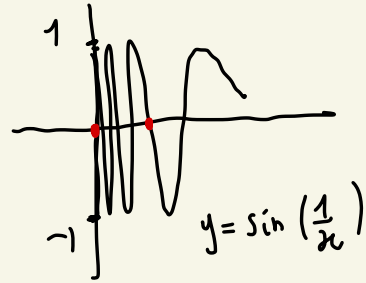
$\Rightarrow E \setminus A = \emptyset \Rightarrow E$ CONN. PER ARCHI.

ESEMPIO: $\exists C \subseteq \mathbb{R}^2$ COMPATTO T.C.

C CONNESSO MA NON PER ARCHI

$$C = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) : x \in (0, 1] \right\} \cup \left(\bigcup_{|y| \leq 1} (0, y) \right)$$

↑
SEGMENTO
VERTICALE



OSS: $\exists f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ CHE HANNO CONNESSI (=INTERVALLI)
IN CONNESSI MA NON SONO CONTINUE

ES:
$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

MA LE
DISCONTINUITÀ
SONO SOLO DI
QUESTO TIPO

TEO: $f: E \rightarrow F$ CONT., E SP. METRICO COMPATTO
 $\Rightarrow f(E)$ COMPATTO.

DIN: y_n SUCC. IN $f(E)$, $x_n \in E$ T.C. $f(x_n) = y_n$
 E cpt $\Rightarrow \exists x_{n_k} \rightarrow x \in E \Rightarrow y_{n_k} = f(x_{n_k}) \rightarrow f(x) \in f(E)$
(f CONT.) CIOÈ $f(E)$ È COMP.

COR: (WEIERSTASS)

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ CONT. E COMP. $\Rightarrow$

f ANNETTE $\max$ E $\min$.

DIN: $f(E) \subseteq \mathbb{R}$ COMPATTO $\Leftrightarrow$ CHIUSO E LIMITATO

$$\Rightarrow \inf f(E) = \min f(\bar{E}) = \min_E f$$
$$\sup f(\bar{E}) = \max f(\bar{E}) = \max_E f.$$

OSS: NON È VERO VICEVERSA

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

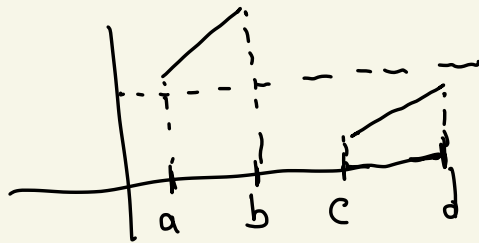
ESERCIZIO: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ CHE MANDA CONNESSI IN CONNESSI
E COMPATTI IN COMPATTI $\Rightarrow f$ CONTINUA

TEO: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA, I INTERVALLO

f È INVERTIBILE (CIOÈ INIETTIVA)

$\Leftrightarrow f$ È STRETT. MONOTONA (CRESCENTE O DECRESC.).

OSS: SERVE I INTERVALLO



DM f STR. MONOTONA $\Rightarrow f$ INIETTIVA.

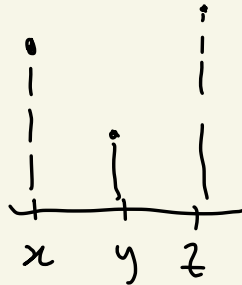
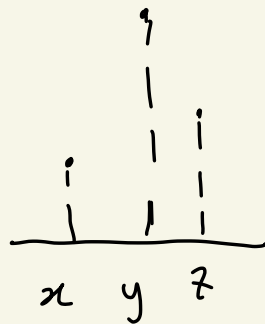
f INIETTIVA $\in$ (PER ASSURDO) NON STR. MONOTONA

$\exists x < y < z \in I$ T.C.

$$f(x) < f(y) \text{ e } f(z) < f(y)$$

oppure

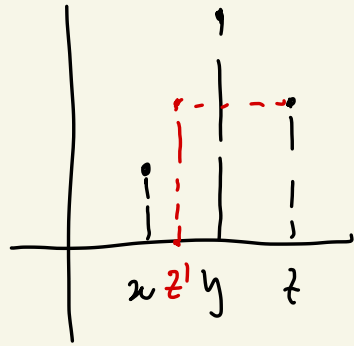
$$f(x) > f(y) \text{ e } f(z) > f(y)$$



CONSIDERIAMO IL PRIMO CASO
(L'ALTRO È ANALOGO)

POSSO SUPPORRE

$$f(x) < f(z) < f(y)$$



(IL CASO $f(z) < f(x) < f(y)$ È ANALOGO).

PER IL TEO VALORI INTERMEDI

$$f([x, y]) \supseteq [f(x), f(y)] \ni f(z) \Rightarrow \exists z' \in (x, y) \text{ t.c.}$$

$$f(z) = f(z') \Rightarrow f \text{ NON È INIETTIVA ASSURDO}$$

COR. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ CONT. E INVERTIBILE, I INTERVALLO

$\Rightarrow f^{-1}$ CONTINUA.

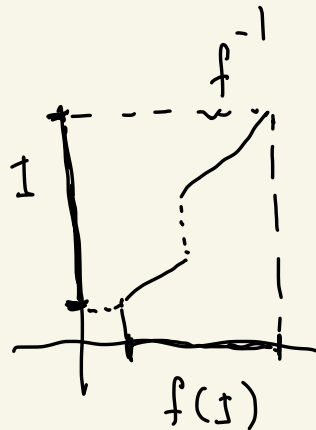
DID. f INVERT $\Rightarrow f$ STR. MONOTONA $\Rightarrow$

$f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ STRETT. MONOTONA $\Rightarrow$

f^{-1} PUO' AVERE SOLO DISC. A SALTO

SE C'E' UNA DISCONT. A SALTO $\Rightarrow$

$f(I) = I$ NON E' CONNESSO, ASSURDO.



cor: $\arcsin(x) := \left(\sin(x) \Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1}$ E' CONT.
 $\left(\text{E STRETT. CRESCENTE} \right)$

$\arccos(x) := \left(\cos(x) \Big|_{[0, \pi]} \right)^{-1}$ E' CONT.

$\log_a(x) = \left(a^x \right)^{-1}$ E' CONT.

$\arctan(x) = \left(\tan(x) \Big|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} \right)^{-1}$ E' CONT.



SERIE

UNA SERIE È UNA SOMMA FORMALE
DI ELEMENTI DI UNO SP. VETTORIALE METRICO V
(TIPICAMENTE $\mathbb{R}$ O $\mathbb{C}$) $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$

LE QUANTITÀ

$$S_N = \sum_{n=n_0}^N x_n \in V$$

SI DICONO SOMME PARZIALI

$$N \geq n_0$$

DEF:

LA SERIE CONVERGE A $x \in V$

$$\Leftrightarrow S_N \rightarrow x \text{ PER } N \rightarrow \infty$$

NEL CASO $V = \mathbb{R}$ DISTINGUIAMO 3 COMPORTAMENTI

① SERIE CONVERGENTE $\Leftrightarrow S_N \rightarrow x \in \mathbb{R}, N \rightarrow +\infty$

② SERIE DIVERGENTE A $\pm\infty$ $\Leftrightarrow S_N \rightarrow \pm\infty, N \rightarrow +\infty$

③ SERIE NON CONVERGENTE

OSS: $V = \mathbb{C}$, $\sum x_n$ $x_n = a_n + ib_n \in \mathbb{C}$

LA SERIE CONVERGE IN $\mathbb{C}$

$(\Rightarrow)$ CONVERGONO $\sum a_n, \sum b_n$ IN $\mathbb{R}$

E NEL CASO SI HA $\sum x_n = \sum a_n + i \sum b_n$

| D'ORA IN POI FISSIAMO $V = \mathbb{R}$

ES:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}$$

SERIE ARMONICA

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$$

$(\alpha > 0)$

SERIE ARMONICA
GENERALIZZATA

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$$

SERIE GEOMETRICA

$x \in \mathbb{R}$ fissato

DUE DONANDE:

① LA SERIE CONVERGE? (CRITERI GENERALI)

② A QUANTO CONVERGE? (+ DIFFICILE)

PROP: $\sum x_n$ CONV. $(\Rightarrow) \{S_N\}$ CONVERGE $(\Rightarrow) S_N$ DI CAUCHY

(CRITERIO DI CAUCHY) $(\Leftrightarrow)$

$$\forall \varepsilon \exists n_\varepsilon \text{ T.C. } \left| \sum_{n=N+1}^M x_n \right| = |S_M - S_N| < \varepsilon$$
$$\forall N, M \geq n_\varepsilon.$$

ES: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

FISSIANO $k \in \mathbb{N}$ E

CONSIDERIAMO

$$S_{2^k} - S_{2^{k-1}} = \sum_{2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{n} > \sum_{2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{2^k}$$

$$= \frac{1}{2^k} (2^k - 2^{k-1}) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow S_N$ NON È DI CAUCHY

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ NON CONVERGE IN $\mathbb{R}$

DATO CHE S_N È

CRESCENTE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

$\sum x_n$ SI DICE A TERMINI POSITIVI

SE $x_n \geq 0 \quad \forall n$, CIOÈ S_N È CRESCENTE,

$\Rightarrow$ DUE SOLE POSSIBILITÀ:

① S_N È LIMITATA E $\sum_n x_n = \sup_N S_N \in \mathbb{R}$

② $S_N \rightarrow +\infty$ E $\sum_n x_n = +\infty$

PROP (COND. NECESSARY)

$$\sum_n x_n = S \in \mathbb{R} \Leftrightarrow S_n \xrightarrow[n]{} S \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n]{} S - S = 0.$$

ES: $\sum_n (-1)^n$ NOT CONVERGE

ES:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

SERIE GEOMETRICA

$$S_N = \sum_{n=0}^N x^n = \begin{cases} N+1 & x=1 \\ \frac{1-x^{N+1}}{1-x} & x \neq 1 \end{cases}$$

SAPPIAMO CHE

$$\begin{cases} x^N \rightarrow 0 & \text{SE } |x| < 1 \\ x^N \rightarrow +\infty & \text{SE } x > 1 \\ x^N \text{ NON CONV.} & \text{SE } x \leq -1 \\ x^N = 1 & \text{SE } x = 1 \end{cases}$$

OTTENIAMO CHE

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$|x| < 1$$

RIESCO A
TROVARE LA
SOMMA DELLA
SERIE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = +\infty$$

$$x \geq 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \text{ NON CONV.}$$

$$x \leq -1$$

ES: (SERIE TELESCOPICHE)

a_n succ. convergente, $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = a - a_0$$

$$S_0 = a_1 - a_0, \quad S_1 = \cancel{a_1} - a_0 + \cancel{a_2} - \cancel{a_1}, \quad S_2 = \cancel{a_2} - a_0 + \cancel{a_3} - \cancel{a_2}$$

$$\dots S_N = a_{N+1} - a_0 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} a - a_0$$

$$a_n = \frac{1}{n+1} \quad a_n \rightarrow a = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(n+1)(n+2)} = -1$$

CloE'

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

CAMBIO DI INDICE

CRITERI DI CONVERGENZA PER SERIE A TERMINI POSITIVI

PROP (CONFRONTO)

$$0 \leq x_n \leq y_n \quad \forall n \geq n_0 \quad \left(\begin{array}{c} \text{DEFINITIVAMENTE} \\ \text{IN } n \end{array} \right)$$

$$\textcircled{1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n = +\infty$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} y_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n < +\infty .$$

Din. $0 \leq x_n \leq y_n \quad \forall n \geq n_0$

$$S_N = \sum_{n=0}^N x_n, \quad T_N = \sum_{n=0}^N y_n$$

sono succ. crescenti per $N \geq n_0$,

quindi o convergono o divergono a $+\infty$,

e si ha

$$S_N - S_{n_0} \leq T_N - T_{n_0}.$$

ES: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2$

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

"1"

Cioè $\sum \frac{1}{n^2}$ CONVERGE $\Delta S \in (1, 2)$

Δ QUANTO CONVERGE? $\left(\frac{\pi^2}{6} \right)$

ES: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

$(\alpha > 0)$

$\alpha = 1$ DIVERGE $\rightarrow +\infty$

$\alpha = 2$ CONVERGE

① $\alpha > 2$ $n^{\alpha} > n^2$, $\frac{1}{n^{\alpha}} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < +\infty$ CFR

② $\alpha < 1$ $n^{\alpha} < n$, $\frac{1}{n^{\alpha}} > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = +\infty$ CFR

③ COSA SUCCEDERE PER $\alpha \in (1, 2)$?

PROP (CRITERIO DI CONDENSAZIONE)

$$x_n \geq 0, \quad x_{n+1} \leq x_n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n < +\infty \quad (\Rightarrow) \quad \sum_{K=K_0}^{\infty} 2^K \cdot x_{2^K} \quad \left(2^{K_0} \geq n_0 \right)$$

APPLICATIONE:

$$\sum_k \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \iff \sum_k 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} < +\infty$$

SERIE
GEOMETRICA

$$\sum_k \frac{2^k}{(2^k)^\alpha} = \sum_k \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}} = \sum_k \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^k < +\infty$$

$$(\implies) \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1 \iff 2^{\alpha-1} > 1 \iff \boxed{\alpha > 1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)^{\alpha}}$$

$$\log(n)^{\alpha} = [\log(n)]^{\alpha}$$

$$\frac{1}{n \log(n)^{\alpha}} \sim \frac{1}{n} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

PER CONDENSATIONE

$$\sum_n \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}} < +\infty \Leftrightarrow \sum_k \frac{\cancel{2^k}}{\cancel{2^k} (\log 2 \cdot k)^{\alpha}} = \frac{1}{(\log 2)^{\alpha}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

$\Leftrightarrow \boxed{\alpha > 1}$

D/n

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + \sum_{k=0}^{\infty} y_k$$

$$y_k = \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} x_n, \quad x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow \frac{1}{2} \left(2^{k+1} x_{2^{k+1}} \right) = 2^k x_{2^{k+1}} \leq y_k \leq 2^k x_{2^k}$$

PER CONFRONTO $\sum y_k$ conv. $(\Leftrightarrow)$

$$\sum 2^k x_{2^k} \text{ conv.}$$



CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

$$a_n > 0, \quad b_n > 0$$

$$a_n \sim b_n \text{ per } n \rightarrow +\infty, \text{ cioè } \lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$$

$$\text{ALLORA } \sum_n a_n < +\infty \iff \sum b_n.$$

DIN. PER $\varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon$ T.C. $(1-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (1+\varepsilon)b_n$

$\forall n \geq n_\varepsilon$. PER IL CONFRONTO

SEGUE LA TEST.

OSS: $\exists$ suff. cne $\exists c, C > 0$ t.c.

$$c \leq \frac{a_n}{b_n} \leq C \quad \forall n \text{ suff. GRANDE,}$$

$c \leq \frac{a_n}{b_n} \leq C$

$$0 < \liminf_n \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_n \frac{a_n}{b_n} < +\infty.$$

ESEMPLI:

$$\sin(x) \sim x \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\textcircled{1} \quad \sin^2\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \left[\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right]^2 \sim \frac{1}{n^{2\alpha}} \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) < +\infty \quad (\Leftrightarrow) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} < +\infty \quad (\Leftrightarrow) \quad \alpha > \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_n \underbrace{\left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right] \cdot \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right)}_{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\sum (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \sim \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$$

SI COMPORTA
COME

$$\textcircled{3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a^{\frac{1}{n}} - 1) \sim \textcircled{\pm} \sum \frac{1}{n} = \textcircled{\pm} \infty \quad (a^x - 1) \sim (\log a) \cdot x$$

per $x \rightarrow 0$

$$a > 0$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \rightarrow 1$$

$n \rightarrow \infty$

$\text{sgn}(\log a)$

$$\textcircled{4} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (= e^x) \quad x > 0$$

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad \frac{x^n}{n!} \sim \frac{(x \cdot e)^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

IN PART. $\frac{x^n}{n!} < \frac{1}{2^n}$ per n suff. grande

$$\Rightarrow \sum_n \frac{x^n}{n!} < +\infty \quad \forall x > 0.$$

CRITERI DEL RAPPORTO E DELLA RADICE (CFR CON LA SERIE GEOMETRICA)

RAPPORTO: $a_n > 0 \quad \forall n$

$$\textcircled{1} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1 \quad \text{DEFINT. IN } n$$

$$\Rightarrow \sum_n a_n < +\infty$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \text{DEF. IN } n \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0$$
$$\sum_n a_n = +\infty$$

Din.

$$\textcircled{1} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1 \quad \text{per } n \geq n_0$$

$$a_{n_0+1} \leq r a_{n_0}, \quad a_{n_0+k} \leq r^k a_{n_0} \quad n = n_0 + k$$

$$a_n \leq r^{n-n_0} a_{n_0} = \left(\frac{a_{n_0}}{r^{n_0}} \right) \cdot r^n \quad \forall n \geq n_0$$

$$\sum_n r^n < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n < +\infty \quad (\text{CFR})$$

$$\textcircled{2} \quad \text{ovvio.}$$

OSS: $\forall \varepsilon \quad \exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad \Rightarrow$

$$r < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n < +\infty$$

$$r > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n = +\infty$$

$$r = 1 \quad \boxed{?}$$

ES: $a_n = \frac{1}{n^\alpha} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^\alpha}{n^\alpha + 1} \rightarrow 1 \quad \forall \alpha > 0$

RADICE: $a_n \geq 0 \quad \forall n$

① $\sqrt[n]{a_n} \leq r < 1 \quad \text{DEF. IN } n \Rightarrow \sum a_n < +\infty$

② $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad a_n \geq 1 \quad \text{DEF. IN } n \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

In part. se $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = r \Rightarrow \begin{cases} r < 1 \Rightarrow \sum a_n < +\infty \\ r > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty \\ r = 1 \Rightarrow \boxed{?} \end{cases}$

DIN. ① $\sqrt[n]{a_n} \leq r \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow a_n \leq r^n \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_n r^n < +\infty \Rightarrow \sum_n a_n < +\infty$

PRODUTTORIE

$a_n > 0 \quad \forall n$ possiamo chiederci se
"converge" $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{n=1}^N a_n \right)$
DEF.

DOVE $\prod_1^N a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{N-1} \cdot a_N$.

Prop

$$\prod_n (1+a_n) \quad a_n \geq 0 \quad \text{CONVERGENTE}$$

$$\Leftrightarrow \sum a_n \text{ CONVERGENTE.}$$

Dln.

$$\begin{aligned}\prod_1^N (1+a_n) &= (1+a_1)(1+a_2) + \dots - (1+a_n) \\ &= 1 + \sum_1^N a_n + \sum_{i < j}^N a_i a_j + \sum_{i < j < k} a_i a_j a_k + \dots + \prod_1^N a_n \\ &\geq 1 + \sum_1^N a_n\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \prod_1^{\infty} (1+a_n) = \lim_N \prod_1^N (1+a_n) \geq 1 + \sum_1^{\infty} a_n$$

QUINDI $\sum a_n = +\infty \Rightarrow \prod_1^{\infty} (1+a_n) = +\infty$.

VOGLIO OTTENERE L'ALTRA IMPLICAZIONE.

$$\log \left(\prod_1^N (1+a_n) \right) = \sum_1^N \log(1+a_n) \leq \sum_1^N a_n$$

OSS: $\log(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0$

$(e^{+\infty} = +\infty)$



$$\Rightarrow \prod_1^N (1+a_n) \leq e^{\sum_1^N a_n} \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_1^N (1+a_n) \leq e^{\sum_1^{\infty} a_n}$$

QUINDI $\sum_n a_n < +\infty \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n) < +\infty$

OSS: $\prod_n \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) < +\infty \quad (\Leftrightarrow) \quad \alpha > 1$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} \sim \sum_n (\sqrt[n]{n} - 1) \sim \sum_n \frac{\log n}{n} = +\infty$$

$$\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{\log \sqrt[n]{n}}{n}} - 1 = e^{\frac{\log n}{n^2}} - 1 \sim \frac{\log n}{n^2} \geq \frac{1}{n} \quad (n \geq 2)$$

$$e^x - 1 \sim x \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

ESEMPIO:

$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_i < \dots$ NUMERI PRIMI

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_i^k}$$

$$n = \prod_{k=1}^N p_{i_k}^{n_k} \rightarrow \text{MULTIPLICITÀ di } p_{i_k}$$

$$\prod_i \sum_k \frac{1}{p_i^k} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \dots\right)$$

SI CONVERTA CONE

$$+\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_i \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} = \prod_i \frac{p_i}{p_i - 1} \sim \sum_i \frac{p_i}{p_i - 1} - 1 = \sum_i \frac{1}{p_i - 1}$$

QUINDI

$$\sum_i \frac{1}{p_i} \sim \sum \frac{1}{p_i - 1} \sim \sum_n \frac{1}{n} = +\infty$$

PIÙ IN GENERALE, DATO $\alpha > 0$,

$$\sum_i \frac{1}{p_i^\alpha} \sim \sum_n \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \quad (\Leftrightarrow) \quad \alpha > 1$$

ES ∈ nPI:

$$\alpha > 0$$

$$\begin{aligned}\log n! &\sim \log \left[\left(\frac{n}{e} \right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \right] \\ &= n \log n - n + \frac{1}{2} \log(2\pi n) \\ &\sim n \log n\end{aligned}$$

$$\sum_n \frac{\log n!}{n^\alpha} \sim \sum_n \frac{n \log n}{n^\alpha} = \sum_n \frac{\log n}{n^{\alpha-1}} \Rightarrow$$

$$\sum_n \frac{\log n!}{n^\alpha} \begin{cases} < +\infty & \alpha > 2 \\ +\infty & \alpha \leq 2 \end{cases}$$

$$\alpha > 0$$

$$2^{n^\alpha} = 2^{(n^\alpha)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n^\alpha}}$$

$$\alpha \geq 1 \Rightarrow n^\alpha = n \cdot n^{\alpha-1} \geq n \Rightarrow 2^{n^\alpha} \geq 2^n$$

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{2^{n^\alpha}} \leq \sum \frac{1}{2^n} = 2$$

$$\alpha \in (0, 1)$$

È vero che

$$\frac{1}{2^{n^\alpha}} < \frac{1}{n^2} \quad \text{DEF. in } n?$$

Cioè $2^{n^\alpha} > n^2$ DEF.

Cioè, passando al logaritmo

$\log(2^{n^\alpha}) = n^\alpha \cdot (\log 2) > 2 \log n$ DEF.

Cioè $\frac{n^\alpha}{\log n} > \frac{2}{\log 2}$ DEF. ? sì dato

che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{\log n} = +\infty$ $\forall \alpha > 0$.



SERIE A TERMINI GENERALI

DEF: $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$,

① CONVERGE SEMPLICEMENTE SE

LA SUCCESSIONE $S_N = \sum_{n=n_0}^N a_n$ CONVERGE PER $N \rightarrow \infty$

② CONVERGE ASSOLUTAMENTE SE

LA SERIE A TERMINI POSITIVI $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ CONVERGE

PROP. $\sum a_n$ CONV. ASSOLUTAMENTE
 $\Rightarrow$ CONV. SEMPLICEMENTE

DIM. PER IL CRIT. DI CAUCHY

① $\sum a_n$ CONV. SENPL. $(\Leftrightarrow) \forall \varepsilon \exists N_\varepsilon$ T.C.

$$\left| \sum_{n=N}^M a_n \right| \leq \varepsilon \quad \forall N, M \geq N_\varepsilon.$$

② $\sum a_n$ CONV. ASS. $(\Leftrightarrow) \forall \varepsilon \exists N'_\varepsilon$ T.C.
 $\sum_{n=N}^M |a_n| \leq \varepsilon \quad \forall N, M \geq N'_\varepsilon.$

PER DIS. TRIANGOLARE

$$\left| \sum_{n=N}^M a_n \right| \leq \sum_{n=N}^M |a_n| \leq \varepsilon \quad \forall N, M \geq N_\varepsilon'$$

PER IPOTESI

$\Rightarrow \sum a_n$ CONV. SEMPLICEMENTE.

OSS: NON VALE IL VICEVERSA:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ CONV. SEMPLICEMENTE MA NON

INFATTI ASSOLUTAMENTE,
 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$

OSS: POSSO GUARDARE LA CONV. DI $\sum |a_n|$

A CUI POSSO APPLICARE

CONFRONTO, RAPPORTO, RADICE

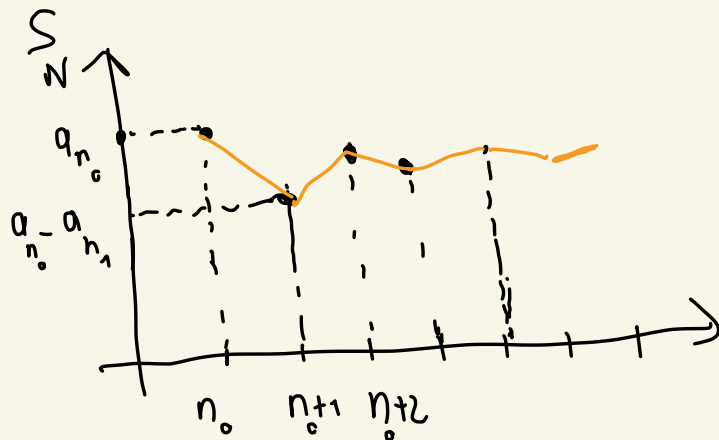
CRITERIO DI LEIBNIZ

SIA $a_n \geq 0$, $a_{n+1} \leq a_n$ DEF. E $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$

ALLORA LA SERIE A SEGNI ALTERNI

$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n$ CONVERGE (SEMPLICEMENTE)

DIN.



SUPP. n_0 PAR

(n_0 DISPARI SI
FA IN NODO SIMILE)

S_{n_0+2k} È UNA SUCC. DECRESCENTE IN k
 S_{n_0+2k+1} È " " CRESCENTE IN k

} POICHÉ
 a_n È DECRESC.

INOLTRE SONO LIMITATE, INFATTI

$$S_{n_0+2k} \geq S_{n_0+1} \quad e$$

$$S_{n_0+2k+1} \leq S_{n_0} \quad \forall k \geq 1$$

$$S_{n_0+2k} \rightarrow l \quad k \rightarrow +\infty$$

$$S_{n_0+2k+1} \rightarrow l' \quad k \rightarrow +\infty$$

PERÒ SI HA $a_{n+2k+1} = |S_{n_0+2k+1} - S_{n_0+2k}| \rightarrow |l - l'|$

PER IPOTESI $\downarrow$
0

PER $k \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow l = l' \text{ e } \sum (-1)^n a_n \text{ CONVERGE A } l.$$

Somma PER PARTI DI UNA SERIE PRODOTTO

a_i, b_i succ. in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

$$\sum_{i=N}^M a_i b_i = \sum_{i=N}^M (a_i - a_{i+1}) B_i + \underbrace{a_{M+1} B_M - a_N B_{N-1}}_{\text{"TERMINI DI BORDO"}}$$

$$B_i = \sum_{k=i}^M b_k \quad \forall N, M > n_0$$

DIM. $b_i = B_i - B_{i+1} \quad \forall i$

$$\begin{aligned} \sum_{i=N}^M a_i b_i &= \sum_{i=N}^M a_i B_i - \sum_{i=N}^M a_i B_{i+1} \quad \begin{matrix} \text{CAMBIO} \\ \text{INDICI} \\ \downarrow \end{matrix} = \sum_{i=N}^M a_i B_i - \sum_{i=N+1}^{M+1} a_{i-1} B_i = \\ &= \sum_{i=N}^M (a_i - a_{i+1}) B_i - a_N B_{N-1} + a_{M+1} B_M. \end{aligned}$$

CRITERIO DI DIRICHLET

$$a_n, b_n \text{ in } \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$$

① $a_n \rightarrow 0$ PER $n \rightarrow \infty$

② a_n HA VARIAB. LIMITATA, CIOÈ $\sum_n |a_{n+1} - a_n| < +\infty$

③ $B_N = \sum_{n=n_0}^N b_n$ ALLORA $|B_N| \leq C \quad \forall N$

$\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n b_n$ CONVERGE (SEMPLICEMENTE)

OSS. SE $a_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$
(2) PUO' ESSERE SOSTITUITA CON

(2') a_n MONOTONA ,

INFATTI SE a_n E' MONOTONA E LIMITATA

SI HA

$$\sum_{n=n_0}^N |a_{n+1} - a_n| = \left| \sum_{n=n_0}^N (a_{n+1} - a_n) \right| = |a_{N+1} - a_{n_0}| \leq C$$

$\forall N$

$$\text{E } \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| = \left| \lim_n a_n - a_{n_0} \right| < +\infty .$$

OSS. PRENDENDO $b_n = (-1)^n$ DIRICHLET
ESTENDE $LE|B_N|$.

DIN. PER CAUCHY DEVO VERIFICARE CHE
 $\forall \varepsilon \exists N_\varepsilon \text{ T.C. } \left| \sum_{n=N}^M a_n b_n \right| \leq \varepsilon \quad \forall N, M \geq N_\varepsilon.$

PER LO SOMMA PER PARTI, ABBIAMO

$$\left| \sum_N^M a_n b_n \right| = \left| \sum_{n=N}^M (a_n - a_{n+1}) B_n + a_{M+1} B_M - a_N B_{N-1} \right|$$
$$\leq \sum_N^M |a_n - a_{n+1}| \cdot |B_n| + |a_{M+1}| \cdot |B_M| + |a_N| \cdot |B_{N-1}| \lesssim$$

$$\leq C \left(\sum_{n=N}^M |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1}| + |a_n| \right) \leq 3\varepsilon$$

SE PRENDO $N, M \geq N_\varepsilon$ DOVE $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ T.C.

$$\sum_{n=N}^M |a_n - a_{n+1}| \leq \frac{\varepsilon}{C} \quad \left(\text{OK PERCHÉ } \sum_n |a_n - a_{n+1}| < +\infty \right)$$

$$e \quad |a_n| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \left(\text{OK PERCHÉ } a_n \rightarrow 0 \right).$$

VARIANTE: CRITERIO DI ABEL

a_n, b_n IN $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ T.C.

① a_n HA VAR. LIMITATA $\left(\Rightarrow a_n \text{ CONVERGE} \right)$

② $\sum b_n$ CONVERGE, cioè B_n È CONVERGENTE

$\Rightarrow \sum a_n b_n$ CONVERGE.

DIN. VARIANTE DELLA PRECEDENTE

QSS: $\sum |a_n - a_{n+1}| < +\infty \Rightarrow a_n \in \text{DI CAUCHY}$

$\Rightarrow a_n \text{ CONVERGE}$

IN FACT

$$|a_N - a_M| = \left| \sum_{n=N}^{M-1} (a_n - a_{n+1}) \right| \leq \sum_{n=N}^{M-1} |a_n - a_{n+1}| \leq \varepsilon$$

$\forall \varepsilon \quad N, M \geq N_\varepsilon$

SERIE DI POTENZE COMPLESSE

$$\sum a_n z^n$$

$$z \in \mathbb{C}$$

$$a_n \in \mathbb{C}$$

SERIE DI POTENZE IN $\mathbb{C}$

DOMANDA: PER QUALI $z \in \mathbb{C}$ CONVERGE?

VEDIAMO LA CONV. ASSOLUTA, CIOÈ GUARDO

$$\sum_n |a_n| \cdot |z|^n$$

CRITERIO DELLA RADICE $\Rightarrow$ LA SERIE CONVERGE SE

$$\text{SE } \lim_n \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z|^n} = |z| \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

$$\text{VA BEVE SE } |z| < R \stackrel{\text{DEF}}{=} \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}$$

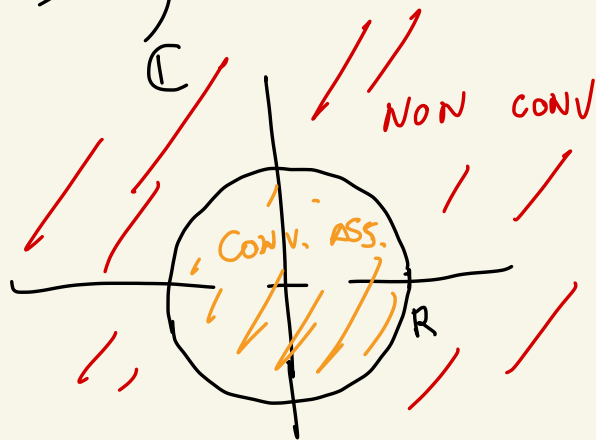
(RAGGIO
DI CONV.)

(OSSERVIAMO CHE SE $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow R \geq 1$)

VICEVERSA SE $|z| \cdot \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} > 1$

$$\Rightarrow \limsup |z^n a_n| > 1$$

$$\Rightarrow z^n a_n \not\rightarrow 0 \text{ e } \sum a_n z^n \text{ NON CONV.}$$



RICAPITOLANDO

$|z| < R \Rightarrow$ CONV. ASS.

$|z| > R \Rightarrow$ NON CONV. $\left(a_n z^n \not\rightarrow 0 \right)$

FIN QUI NON SERVE NESSUNA IPOTESI DI a_n .

COSA SUCCEDDE PER $|z| = R$?

APPLICO DIRICHLET

$$\sum_n a_n z^n = \sum_n (a_n R^n) \left(\frac{z}{R}\right)^n$$

OSSERVIAMO CHE SE $|z| \leq R$ E $z \neq R$

$$B_N = \sum_{n=0}^N \left(\frac{z}{R}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{z}{R}\right)^{N+1}}{1 - \frac{z}{R}} \quad \text{HO CHE}$$

$$|B_N| \leq \frac{1}{\left|1 - \frac{z}{R}\right|} \left(1 + \left|\frac{z}{R}\right|^{N+1}\right) \leq \frac{2}{\left|1 - \frac{z}{R}\right|} \quad \forall N$$

QUINDI SE $a_n R^n \rightarrow 0$ ED HA VAR. LIMITATA
OTTENGO CHE $\sum a_n z^n$ CONVERGE (PER DIRICHLET)

$\forall z$ CON $|z| = R$, $z \neq R$.

IL CASO $z = R$ VA VISTO A PARTE.

OSS: R SI DICE RAGGIO DI CONV.
DELLA SERIE DI POTENZE

ESEMPIO

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

RAGGIO DI CONV.

$|z| < 1 \Rightarrow$ CONV. ASSOLUTA

$|z| > 1 \Rightarrow \frac{z^n}{n} \not\rightarrow 0 \Rightarrow$ LA SERIE NON CONV.

$$\boxed{\begin{matrix} |z|=1 \\ z \neq 1 \end{matrix}} \Rightarrow |B_N| = \left| \sum_{n=n_0}^N z^n \right| = \left| \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} - \frac{1 - z^{n_0}}{1 - z} \right|$$
$$= \left| \frac{z^{n_0} - z^{N+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{2}{|1 - z|}$$

INOLTRE $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ED È NONOTONA

$\Rightarrow$ HA VAR. LIMITATA

$\Rightarrow$ PER DIRICHLE $\sum \frac{z^n}{n}$ CONVERGE (NON ASSOLUT.)

$\forall z \text{ t.c. } |z|=1, z \neq 1$

$\boxed{z=1}$ $\sum \frac{1}{n} = +\infty$ NON CONV.



ESEMPIO (SERIE DI FOURIER)

$$\sum a_n \sin(nx), \quad \sum a_n \cos(nx)$$

$x \in \mathbb{R}$
FISSATO

SI PUÒ APPLICARE DIRICHLET
CON $b_n = \sin(nx)$ O $b_n = \cos(nx)$
SE a_n È INFINITESIMA E HA VAR. LIMITATA

VA VERIFICATO

$$\left| \sum_{n=0}^N \sin(nx) \right| \leq C$$

$\forall N$

(E LO STESSO PER
 $\cos(nx)$)

OSSERVANDO CHE $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$

QUINDI $\sin(nx) = \operatorname{Im}(e^{inx})$, $\cos(nx) = \operatorname{Re}(e^{inx})$

$$\sum_{n=0}^N \sin(nx) = \operatorname{Im} \sum_{n=0}^N (e^{ix})^n$$

$\downarrow$
 $z, |z|=1$

$$= \begin{cases} \operatorname{Im} \left(\frac{1 - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}} \right) & \text{se } x \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{se } x = 2k\pi \end{cases}$$

$$\left| \sum_{n=0}^N \sin(nx) \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{ix}|} \quad x \neq 2k\pi \quad \forall N$$

$$\sum_{n=0}^N \sin(2kn\pi) = 0 \quad \forall N$$

$\Rightarrow$ LA SERIE CONVERGE $\forall x$

NEL CASO $\sum a_n \cos(nx)$ HO, ALLO STESSO MODO,
CONVERGENZA $\forall x \neq 2k\pi$, INVECE PER $x = 2k\pi$
DEVO STUDIARE LA SERIE $\sum a_n$

SERIE DI POTENZE

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$$c_n \in \mathbb{C} \quad \forall n$$

$$z_0 \in \mathbb{C} \quad \text{"CENTRO" DELLA SERIE}$$

$$\exists R \in [0, +\infty] \quad \text{RAGGIO DI CONVERGENZA}$$

$$\frac{1}{R} = \limsup_n \sqrt[n]{|c_n|} \quad \left(\text{CON LA CONV. } \frac{1}{0} = +\infty, \frac{1}{+\infty} = 0 \right)$$

T.C. LA SERIE CONV. ASS. SE $|z - z_0| < R$
E NON CONV. SE $|z - z_0| > R$

CERCHIO DI
CONVERGENZA

LA CONV. AL BORDO, CIOÈ PER $|z - z_0| = R$,

SI STUDIA COL CRITERIO DI DIRICHLET

O COL CRIT. DELLA CONV. ASSOLUTA.

IN OGNI CASO È DEF.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_R(z_0) = \left\{ z : |z - z_0| < R \right\}$$

PROP: f È CONTINUA SU $B_R(z_0)$.

SIN.

$$\text{SIA } \bar{z} \in B_R(z_0)$$

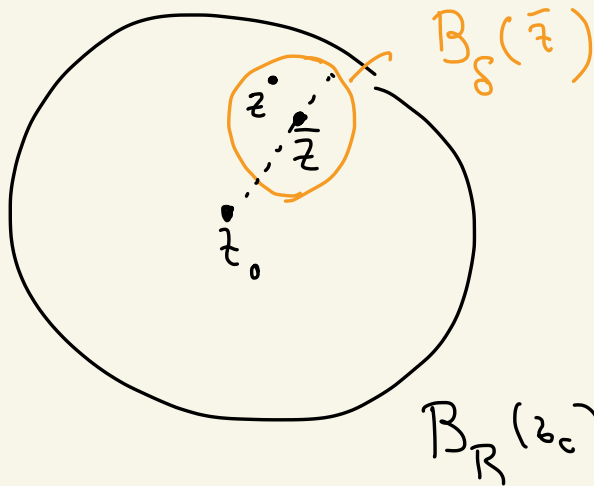
VOGLIO VEDERE CHE

f È CONT. IN $\bar{z}$.

$$\text{SIA } \delta \text{ T.C. } B_\delta(\bar{z}) \subseteq B_R(z_0), \text{ cioè } |\bar{z} - z_0| + \delta < R$$

$$\forall z \in B_\delta(\bar{z}) \quad \sum c_n (z - z_0)^n \text{ CONV. ASSOL. A } f(z)$$

INOLTRE TALE CONV. È UNIFORME IN $z \in B_\delta(\bar{z})$



INFATTI

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^N c_n (z-z_0)^n \right| =$$

$$= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n| |z-z_0|^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n| \left(\overbrace{|z_0 - \bar{z}| + \delta}^{R'} \right)^n$$

$N \rightarrow \infty \rightarrow 0$

NB I polinomi $S_N(z) = \sum_{n=0}^N c_n (z-z_0)^n$

CONVERGONO A UNIFORMEMENTE A $f(z)$

IN OGNI CERCHIO $B_{R'}(z_0)$ CON $R' < R$.

ORA STIMIAMO

$$\begin{aligned} |f(z) - f(\bar{z})| &= \left| S_N(z) - S_N(\bar{z}) + f(z) - S_N(z) + S_N(\bar{z}) - f(\bar{z}) \right| \\ &\leq \left| S_N(z) - S_N(\bar{z}) \right| + \left| f(z) - S_N(z) \right| + \left| f(\bar{z}) - S_N(\bar{z}) \right| \end{aligned}$$

FISSO $\varepsilon > 0$ E SCEGO N_ε T.C.

$$\begin{aligned} |f(z) - S_N(z)| < \varepsilon \quad \forall N > N_\varepsilon \quad \text{LO POSSO FARE} \\ \forall z' \in B_\delta(\bar{z}) \quad \text{PER LA CONV. UNIFORME} \end{aligned}$$

FISSATO TALE N , $S_N(z)$ È CONTINUA, $\Rightarrow \exists \delta_\varepsilon$ TALE CHE

$$|S_N(z) - S_N(\bar{z})| \leq \varepsilon \quad \text{se} \quad z \in B_{\delta_\varepsilon}(\bar{z})$$

PER TALE δ_ε HO QUINDI

$$|f(z) - f(\bar{z})| \leq 3\varepsilon \quad \forall z \in B_{\delta_\varepsilon}(\bar{z})$$

$\Rightarrow f$ È CONTINUA IN $\bar{z}$.

OSS: CON LA STESSA DIN. HO CHE

f È UNIF. CONTINUA IN $B_{R'}(z_0)$ $\forall R' < R$.

NON È DETTO CHE LO SIA IN $B_R(z_0)$.

RIORDINAMENTI

DEF: LA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ È UN RIORDINAMENTO

DI $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ SE $\exists f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ biettiva

T.C. $b_n = a_{f(n)}.$

DOMANDA: SE $\sum a_n$ CONV. COSA POSSO DIRE

DI $\sum b_n?$

TEO $\sum a_n$ conv. ASSOLUTAMENTE A S

$\Rightarrow \sum b_n$ conv. ASSOLUTAMENTE, SEMPRE A S.

Dim. $b_n = a_{f(n)}$ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ BIGETTIVO

$\forall N \in \mathbb{N} \exists M \geq N$ TALE CHE

$$\{a_1, a_2, \dots, a_N\} \subseteq \{b_1, \dots, b_M\}$$

FISSO $N' \geq M$ E GUARDO LA DIFF. DELLE SOMME PARZIALI

$$\left| \sum_{n=0}^{N'} (a_n - b_n) \right| \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon \quad \text{SE } N \text{ È ABB. GRANDE.}$$

IN GENERALE NON È VERO SE $\sum a_n$ CONV. SEMPLIC.
MA NON ASSOL.

$$\text{SIA } S^+ = \sum \max(a_n, 0) \in [0, +\infty]$$

$$S^- = -\sum \min(a_n, 0) \in [0, +\infty]$$

OSSERVANO CHE $\sum a_n$ CONV. ASSOL. $\Leftrightarrow S^+ < +\infty$

$$\text{E LA SOMMA È } S = S^+ - S^-$$

PROP: $\sum a_n$ CONV. SEMPL. NON ASSOL. (QUINDI $S^+ = S^- = +\infty$)

$\Rightarrow \forall S \in [-\infty, \infty] \exists$ UN RIORDINAMENTO $b_n = a_{f(n)}$ T.C.
 $\sum b_n = S.$ (DIM. X ESERCIZIO)

OSS: $\odot$ SE $S^+ = +\infty$ E $S^- < +\infty \Rightarrow$

$$\sum_n a_n = +\infty \quad \left(\text{E LO STESSO PER OGNI RIORDINAM.} \right)$$

$\odot$ SE $S^- = +\infty$ E $S^+ < +\infty \Rightarrow$

$$\sum_n a_n = -\infty \quad \left(\text{E LO STESSO } \forall \text{ RIORDINAMENTO} \right)$$

PRODOTTI DI DUE SERIE

SIANO $\sum a_i = S_a$ E $\sum b_j = S_b$ DUE SERIE CONV.

POSSO ESPRIMERE $(\sum a_i)(\sum b_j)$ COME SOMMA DI UNA SERIE ?

$$\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j\right) = \sum_i \left(a_i \sum_j b_j\right) = \text{"} \sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_i b_j \text{"}$$

$$S_a \cdot S_b$$

LA SERIE

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right)$$

SI DICE PRODOTTO DI
CAUCHY DELLE DUE SERIE

TEO SE LE SERIE CONV. ASSOLUTAMENTE $\Rightarrow$

LA SERIE PRODOTTO $\sum_n \sum_{i+j=n} a_i b_j$

CONV. ASSOLUTAMENTE A $S_a \cdot S_b$.

Din. SO CHE

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| = T_a < +\infty$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} |b_i| = T_b < +\infty$$

IN PART.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} |a_i b_j| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \leq T_a \cdot T_b < +\infty$$

QUINDI LA SERIE PRODOTTO CONV. ASSOLUTAMENTE,

$\Rightarrow$ A NENO DI RIORDINAMENTO

$$\sum_n \sum_{i+j} a_i b_j = \sum_i \left(a_i \sum_j b_j \right) = S_a \cdot S_b.$$

OSS.: NON VALE SENZA L'ASSOLUTA CONVERGENZA.

SE PERO' $\sum a_n$ CONV. ASS. E $\sum b_n$ CONV.

POSSO DIRE ANCORA CHE LA SERIE

PRODOTTO CONV. A $S_a \cdot S_b$ (TEOREMA DI NERTENS).

APPLICAZIONE

$$f(z) = \sum_n a_n z^n$$

$$g(z) = \sum_n b_n z^n$$

$R_a > 0$ RAGGIO DI CONV.

$R_b > 0$ RAGGIO DI CONV.

$\Rightarrow$ LA SERIE PRODOTTO $\sum_n c_n z^n = f(z) \cdot g(z)$, CON $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$,
HA RAGGIO DI CONV. $R_c \geq \min(R_a, R_b)$.



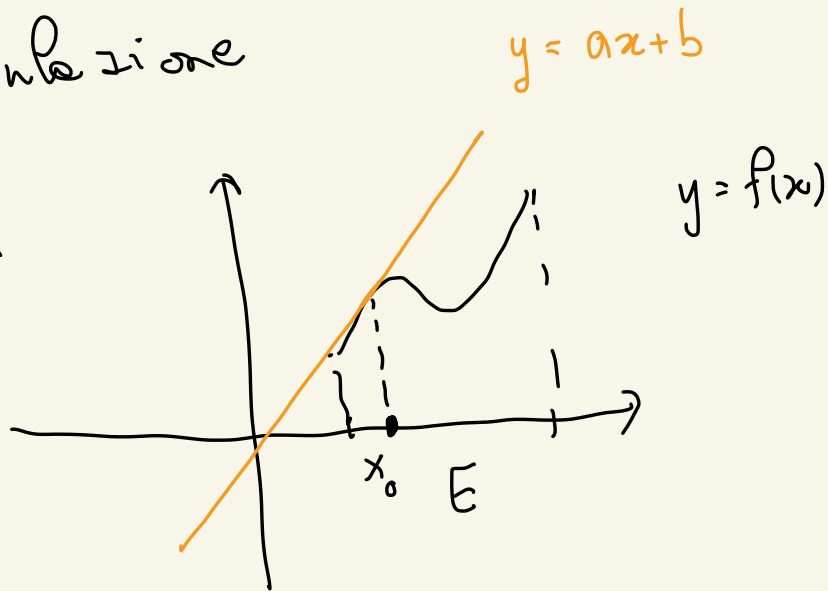
CALCOLO DIFFERENZIALE

$$f: E \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subseteq \mathbb{R}$$

$x_0 \in E$ pt. di accumulazione

CERCHIANO LA RETTA
CHE APPROSSIMA
NELLO $f(x)$
VICINO A x_0

RETTA TANGENTE



$C \in \mathbb{R}$ CHIAMO $y = ax + b$ T.C.

$$f(x) - (a(x-x_0) + b) = o(x-x_0)$$

SE PONGO $x = x_0$ HO SUBITO $b = f(x_0) \Rightarrow$

$$f(x) - f(x_0) - a(x-x_0) = o(x-x_0)$$

DIVIDENDO PER $x-x_0$ OTTENGO

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{DEF.}}{=} f'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0) \in \mathbb{R}$$

DERIVATA DI
 f IN x_0

SE QUESTO LIMITE ESISTE f SI DICE
DERIVABILE IN x_0 E

$f'(x_0)$ È IL COEFF. DELLA RETTA TANGENTE
AL GRAFICO DI f IN $(x_0, f(x_0))$ DI EQ.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

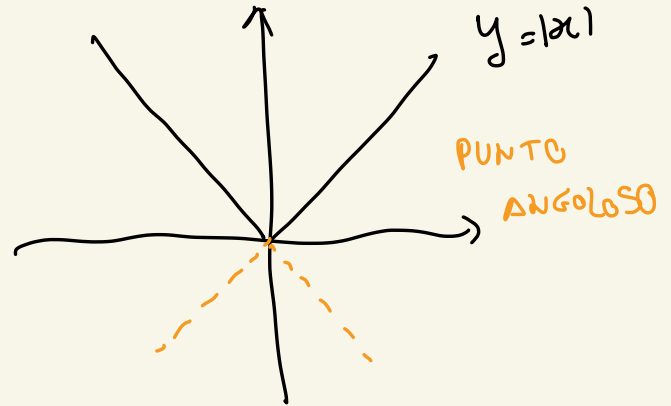
OSS: f DERIVABILE, CIOÈ $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$
IN $x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f$ È CONTINUA
IN x_0

NON È VERO IL VICEVERSA

① $f(x) = |x|$

NON È DERIVABILE IN $x=0$

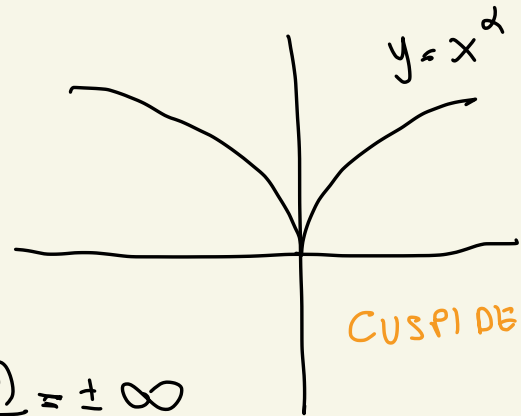
$$\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \pm 1$$



② $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ (-x)^2 & x < 0 \end{cases}$

NON È DERIVABILE
IN $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \pm \infty$$



FACEVANO IL LIMITE DESTRO O SINISTRO

DEFINIANO

$$\frac{df}{dx^+}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

DERIVATA
DESTRA

$$\frac{df}{dx^-}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \quad ,,$$

DERIVATA
SINISTRA

OSS: f È DERIVABILE IN x_0 ($\Rightarrow$)

$\rightarrow$ LE DERIVATE DESTRA E SINISTRA E COINCIDONO

PROPRIETÀ ALGEBRICHE DELLA DERIVATA

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ È PARI SE $f(x) = f(-x)$
È DISPARI SE $f(x) = -f(-x)$.

① f PARI $\Rightarrow f'$ DISPARI, f DISPARI $\Rightarrow f'$ PARI

$$\text{SUPP. } f \text{ PARI} \Rightarrow f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h}$$

$$(h = x - x_0)$$

$$= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = -f'(x)$$

f DISPARI SI FA ALLO STESSO NODO

$$\textcircled{1} \quad (cf)'(x) = c \cdot f'(x) \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{2} \quad (f \pm g)' = f' \pm g' \quad \text{ADDITIVITÀ DEL LIMITE}$$

$$\textcircled{3} \quad (fg)' = f'g + fg'$$

$$(fg)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \right]$$

$$= g(x) \lim_h \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \lim_h \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= gf' + fg'$$

① f DERIVABLE IN $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{f} \text{ DERIV. IN } x \in \mathbb{R} \quad \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-[f(x+h) - f(x)]}{h f(x+h) f(x)}$$

OSS: DALLE ULTIME DUE PROPRIETÀ OTTENIAMO

$$\textcircled{c} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} + f \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\text{se } g(x) \neq 0\right)$$

CHAIN RULE, DERIVATA DI FUNZIONE COMPOSTA

f, g g DERIV. IN x_0 , f DER. IN $g(x_0)$

$\Rightarrow f \circ g$ DERIVABILE IN x_0 E

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

DOBBIAMO VEDERE CHE

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) \stackrel{?}{=} f'(g(x_0)) g'(x_0) (x-x_0) + o(x-x_0)$$

SAPPIAMO (1) $g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$

$$(2) \quad f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0)) \left(g(x) - g(x_0) \right) + o(g(x) - g(x_0)) \leftarrow \begin{matrix} o(x-x_0) \\ \text{PER (1)} \end{matrix}$$

USANDO (1)

$$\downarrow = f(g(x_0)) + f'(g(x_0)) g'(x_0) (x-x_0) + o(x-x_0)$$

DERIVATA DI FUNZIONI ELEMENTARI

$$(c)' = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$(ax+b)' = a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$(x^n)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_h \frac{\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} h^j - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overset{\binom{n}{1}}{\rightarrow} n x^{n-1} h + o(h)}{h} = n x^{n-1}$$

OSS: $P(x)$ POL DI GRADO $n \Rightarrow P'(x)$ È UN POL. DI GRADO $n-1$

$$\boxed{\sin(x)' = \cos(x)}$$

$$\boxed{\cos(x)' = -\sin(x)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_h \sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \lim_h \frac{\sin(h)}{h} \cdot \cos(x) = \cos(x)$$

$\downarrow$ 0
 $\downarrow$ 1

L'ALTRA DERIVATA È SINILE.

$$\tan(x)' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\sin(x)' \cos(x) - \sin(x) \cos(x)'}{\cos(x)^2}$$

$$= \frac{\sin(x)^2 + \cos(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$$

$$(e^x)' = e^x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\log(x)' = \frac{1}{x} \quad x > 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{PIÙ IN GENERALE} \\ \log(|x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0 \end{array} \right]$$

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

$$\log(x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x}$$

→ 1

$$\odot \quad f \text{ DERIV.} \Rightarrow (e^f)' = e^f \cdot f'$$

$$\odot \quad f \text{ DERIV.} \text{ \& } f > 0 \Rightarrow \log(f)' = \frac{f'}{f}$$

PIU' IN GENERALE f, g DERIVABILI $f > 0$

$$\Rightarrow f^g = e^{\log(f^g)} = e^{g \cdot \log(f)}$$

$$\odot \quad (f^g)' = e^{g \log(f)} \cdot [g \log(f)]' = f^g \left(g' \log(f) + \frac{g f'}{f} \right)$$

ESEMPLI:

$$\textcircled{1} \quad x^\alpha \quad x > 0 \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x}$$

$$(x^\alpha)' = x^\alpha \cdot (\alpha \log x)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\textcircled{2} \quad a^x \quad a > 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$a^x = e^{x \cdot \log a}$$

$$(a^x)' = a^x (x \log a)' = (\log a) \cdot a^x$$

$$\textcircled{3} \quad x^x = e^{x \log x}$$

$$(x^x)' = x^x (x \log x)' = x^x (\log x + 1)$$

$$x > 0$$

DERIVATA DI FUNZIONE INVERSA

f INVERTIBILE IN UN INTORNO DI x_0

È DERIVABILE IN x_0 CON $f'(x_0) \neq 0$ ①

$\Rightarrow f^{-1}$ È DERIVABILE IN $f(x_0)$ E SI HA

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

SAPPIAMO

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

PER x IN UN INTORNO
DI x_0

$$\in f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

$$f^{-1}\left(\underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)}_y\right) = x_0 + x - x_0$$

$$y = y_0 + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

$$\downarrow f^{-1}(y_0)$$

$y_0 = f(x_0)$

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + x - x_0 = \bar{f}^{-1}(y_0) + \frac{y - y_0}{f'(x_0)} + o(y - y_0)$$

QUINDI

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

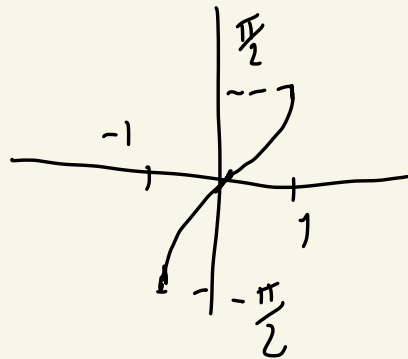
OSS:

$$\text{SE } f'(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \pm \infty$$

ESEMPI:

$$\arcsin(y) = \sin(x) \Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}^{-1}$$

$$y = \sin(x)$$



$$\odot \quad \arcsin(y)' = \frac{1}{\sin(x)'} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \\ \cos(x) = \sqrt{1 - y^2} \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

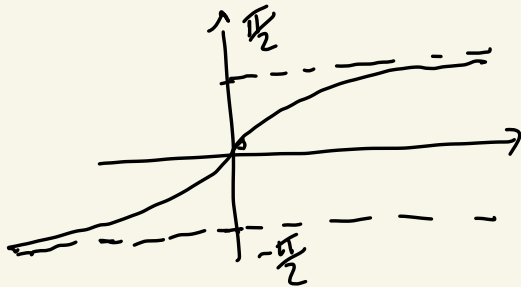
$$\forall y \in (-1, 1)$$

$$\textcircled{\cdot} \quad \arccos(y)' = -\frac{1}{\sin(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \forall y \in (-1, 1)$$

$$\arccos(y) = \cos(x) \Big|_{[0, \pi]}^{-1} \quad \arctan(y) = \tan(x) \Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}^{-1}$$

$y = \tan(x)$

$$\textcircled{\cdot} \quad \arctan(y)' = \frac{1}{\tan(x)'} = \frac{1}{1 + \tan(x)^2} = \frac{1}{1 + y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$





DEF:

○ $f: M \rightarrow N$ M, N spazi metrici

È LIPSCHITZIANA DI COSTANTE $C > 0$

$$\text{SE } d_N(f(x), f(y)) \leq C d_M(x, y) \quad \forall x, y \in M$$

○ $f: M \rightarrow M$ È UNA CONTRAZIONE

SE È LIPSCHITZIANA CON COSTANTE $C < 1$.

TEOREMA CONTRAZIONI

M SP. METRICO COMPLETO

$f: M \rightarrow M$ È UNA CONTRAZIONE

$\Rightarrow \exists! \bar{x} \in M$ T.C. $f(\bar{x}) = \bar{x}$ (PUNTO FISSO PER f)

INOLTRE $\forall x_0 \in M$ LA SUCC. PER RICORRENZA

$x_{n+1} = f(x_n)$ CON DATO INIZIALE x_0

CONVERGE A $\bar{x}$.

DIN: IL PUNTO FISSO $\bar{x}$ (SE ESISTE) È UNICO.

INFATTI, SE $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ SONO PUNTI FISSI

$$\Rightarrow d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = d(f(\bar{x}_1), f(\bar{x}_2)) \leq C d(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_2. \quad (C < 1)$$

PER L'ESISTENZA DI $\bar{x}$, FISSIAMO $x_0 \in \Pi$

E CONSIDERIAMO $x_{n+1} = f(x_n)$.

OSSERVIANO CHE

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq C d(x_n, x_{n-1}) \leq C^n d(x_1, x_0) \quad \forall n$$

VEDIAMO CHE x_n È DI CAUCHY.

$\forall m > n$ SI HA

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq d(x_0, x_1) \sum_{k=n}^{m-1} C^k \\ &\quad \uparrow \\ &\text{DIS. TRIANG.} \end{aligned} \leq C^n d(x_0, x_1) \sum_{j=0}^{\infty} C^j = \frac{d(x_0, x_1) C^n}{1-C}$$

$$\Rightarrow x_n \text{ È DI CAUCHY} \Rightarrow x_n \rightarrow \bar{x}.$$

PER VEDERE CHE $\bar{x}$ È UN PUNTO FISSO,

PASSIAMO AL LIMITE IN $x_{n+1} = f(x_n)$,

OSSERVANDO CHE UNA CONTRAZIONE È CONTINUA,

$$\Rightarrow \bar{x} = \lim_n x_{n+1} = \lim_n f(x_n) = f(\bar{x}).$$

ESERCIZIO:

① Sia $P(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$ $n \in \mathbb{N}$

TROVARE LE SOLUZIONI $P(z) = 0$.

$$P(z)(z-1) = (1+z+z^2+\dots+z^n)(z-1) = z^{n+1} - 1 = 0$$

$$z=1 \quad \text{o} \quad P(z)=0$$

$$1 = e^{2k\pi i} \quad k \in \mathbb{Z} \quad z^{n+1} = 1 \Leftrightarrow z = e^{\frac{2k\pi}{n+1}i} \quad k \in \{0, \dots, n\}$$

$$P(z)=0 \Leftrightarrow z = e^{\frac{2k\pi}{n+1}i} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right) \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

$$\textcircled{2} \quad a_n > 0, \quad a_{n+1} \leq a_n, \quad \sum a_n < +\infty$$

(LEMMA DI ABEL)

$$\text{MOSTRARE CHE } \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 0.$$

PER CONDENSAZIONE, SAPPIAMO CHE $\sum 2^k a_{2^k} < +\infty$

$$\Rightarrow \lim_k 2^k a_{2^k} = 0.$$

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE $\exists \varepsilon > 0$ T.C.

$$n_k a_{n_k} \geq \varepsilon \quad \text{PER UNA SUCCESSIONE } n_k \rightarrow +\infty.$$

A NENO DI PASSARE A UNA SOTTOSUCC. POSSIAMO SUPPORRE

$$n_{k+1} \geq 2n_k \quad \forall k.$$

$$n_k \leq n_{k+1}/2$$

OSSERVIAMO CHE

$$\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}} a_n \geq \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}} a_{n_{k+1}} = (n_{k+1} - n_k) a_{n_{k+1}} \geq \frac{n_{k+1}}{2} a_{n_{k+1}}$$

a_n DECRESCENTE

$$\geq \frac{\varepsilon}{2}$$

QUESTO CONTRADDICE IL CRITERIO DI CAUCHY

$$\left[\forall \varepsilon \exists n_\varepsilon \text{ t.c. } \sum_{k=n}^m a_k \leq \varepsilon \quad \forall m \geq n \geq n_\varepsilon \right]$$

ASSURDO, QUINDI $na_n \xrightarrow{n} 0$.

OSS: $na_n \xrightarrow{n} 0$ e $a_{n+1} \leq a_n \not\Rightarrow \sum a_n < +\infty$, ES: $a_n = \frac{1}{n \log n}$

① $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ CPT $\rightarrow$ CPT INTERV. $\rightarrow$ INTERV.

DEVO DIM. CHE, DATA $x_n \rightarrow x_0$, SI HA

$$\lim_n f(x_n) = f(x_0).$$

$K = \left(\bigcup_n x_n \right) \cup x_0$ È UN COMPATTO

$f(K) = \left(\bigcup f(x_n) \right) \cup f(x_0)$ È UN COMPATTO

$\Rightarrow f(x_0) = \lim_n f(x_n)$ o LA SUCC. $f(x_n)$ HA UN
PUNTO DI ACC. $y_1 \neq f(x_0)$, $y_1 \in f(K)$.

SUPP. PER ASSURDO CHE ESISTA UN TALE y_1 .

A NENO DI PASSARE A UNA SOTTOVCC.

POSSO SUPPORRE $f(x_n) \rightarrow y_1 = f(x_{\bar{n}})$.

- QUESTO PUÒ SUCCEDERE:

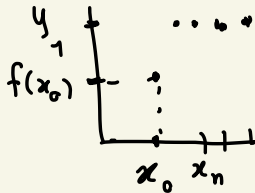
$$\text{ES } f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad x_n = \frac{1}{n} \quad \begin{aligned} f(x_n) &= 1 = y_1 \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

- NON HO USATO CHE f NANDA INTERVALLI IN INTERVALLI

LA STESSA PROPRIETÀ VALE PER $\{x_n\}_{n \geq n_0}$

QUINDI POSSO SUPPORRE

$$f(x_n) = y_1 \neq f(x_0) \quad \forall n.$$



POSSO SUPPORRE $x_{n+1} \leq x_n$

COME IN FIGURA.

f non ha INT. IN INTERVALLI $\Rightarrow$ (supp. $y_1 > f(x_0)$)

$$f([x_0, x_n]) = I_n \supseteq [f(x_0), y_1] \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \exists \tilde{x}_n \in (x_0, x_n) \text{ t.c. } f(\tilde{x}_n) \in \left(y_1 - \frac{1}{n}, y_1\right).$$

OTTIENGO UNA SUCC. $\tilde{x}_n$ T.C.

$$\tilde{x}_n \rightarrow x_0 \quad \text{e} \quad f(\tilde{x}_n) \rightarrow y_1 \neq f(x_0) \quad \text{ma} \quad f(\tilde{x}_n) \neq y_1 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow f\left(\bigcup_{\text{CPT}} \tilde{x}_n \cup x_0\right) = \bigcup f(\tilde{x}_n) \cup f(x_0) \quad \text{NON È CPT.}$$

NON CONTIENE y_1 . ASSURDO.



DERIVATE SUCCESSIVE

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right) = f^{(n)}$$

DERIVATA n^a di f

PROP. $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ A APERTO $x_0 \in A$

f È DERIVABILE DUE VOLTE IN x_0
(IN PART. È DERIVABILE IN UN INTORNO DI x_0)

ALLORA :

$$\textcircled{1} \quad f'(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow$$

x_0 È UN MINIMO LOCALE STRETTO

$$\text{cioè} \quad f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \quad x \neq x_0$$

$$\textcircled{2} \quad f'(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow$$

x_0 È UN MASSIMO LOCALE STRETTO

VICEVERSA

③ x_0 È UN MINIMO LOCALE $\Rightarrow$

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{E} \quad f''(x_0) \geq 0$$

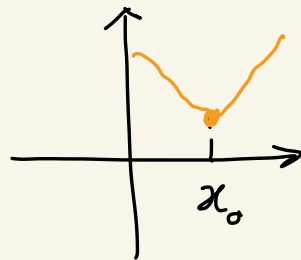
④ x_0 È UN MASSIMO LOCALE $\Rightarrow$

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{E} \quad f''(x_0) \leq 0.$$

OSS: $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ IN GENERALE NON POSSIAMO
CONCLUDERE, ES: $f(x) = x^n \quad (n \geq 3)$

Dim:

$$\textcircled{1} \quad f'(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_0) > 0$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$$

$$\text{QUINDI} \quad \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0 \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad x \neq x_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 & x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \Rightarrow f \text{ è STR. CRESCENTE} \\ f'(x) < 0 & x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \Rightarrow f \text{ è STR. DECRESCENTE} \end{cases}$$

$\Rightarrow x_0$ è MINIMO LOCALE STRETTO

② SI FA CONE ①

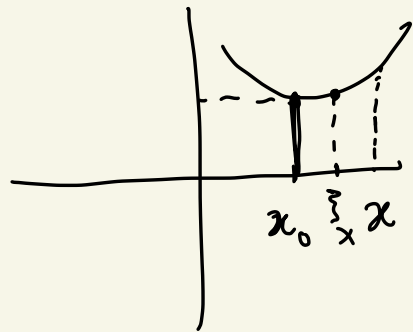
③ x_0 MINIMO LOCALE PER f

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

$$\exists \varepsilon \text{ T.C. } f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

PER LAGR. $\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \exists \xi_x \in (x_0, x) \text{ T.C.}$

$$f'(\xi_x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi_x) - f'(x_0)}{\xi_x - x_0} \geq 0$$



④ SI FA COME ③ ,

PIU' IN GENERALE SI HA

PROP $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ A INTERVALLO DI x_0

f DERIVABILE n VOLTE IN x_0 , $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad 1 \leq k < n \quad \text{e} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

ALLORA

① n PARI e $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ È UN MINIMO
LOCALE STRETTO

② n PARI e $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ È UN MAX LOCALE STRETTO

③ n DISPARI e $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$
 f È STETT. CRESCENTE IN UN INTORNO DI x_0 ,
QUINDI x_0 NON È MAX O MIN

④ n DISPARI e $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$
 f È STETT. DECRESCENTE IN UN INTORNO

NOTAZIONE: $A \subseteq \mathbb{R}$ APERTO

SI INDICA CON

$$C^n(A) = \left\{ f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ DERIVABILI } n\text{-VOLTE} \right. \\ \left. \text{CON } f^{(n)} \text{ CONTINUA} \right\}$$

SP. VETTORIALE SU CUI SI PUÒ METTERE

LA NORMA

$$\|f\|_{C^n} = \sum_{k=0}^n \max_{x \in A} f^{(k)}(x)$$

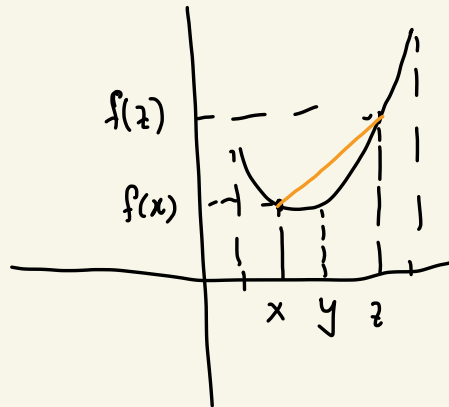
FUNZIONI CONVESSE E CONCAVE

DEF: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I INTERVALLO, È CONVESSA

SE $\forall x < y < z$ SI HA

$$f(y) \leq f(x) + \frac{f(z) - f(x)}{z - x} (y - x)$$

f È CONCAVA SE $-f$ È CONVESSA



OSS: LA DISUG. SI PUÒ SCRIVERE EQUIV.

$$y = \lambda x + (1-\lambda)z \quad \lambda \in [0, 1]$$

↓
COMB. CONVESSA DI x E z

$$f(y) = f(\lambda x + (1-\lambda)z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(z)$$

$$\forall x, z \in I \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

ES: x^n n PARI È CONVESSA, $|x|$ È CONVESSA
 x^n n ≥ 3 DISPARI NON È CONV., x È CONVESSA

PROP $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ DERIVABILE $\Rightarrow$

f CONVESSA $\Leftrightarrow f'$ CRESCENTE

DIN:

$\Rightarrow \forall x < y < z$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

$y \rightarrow x \downarrow$

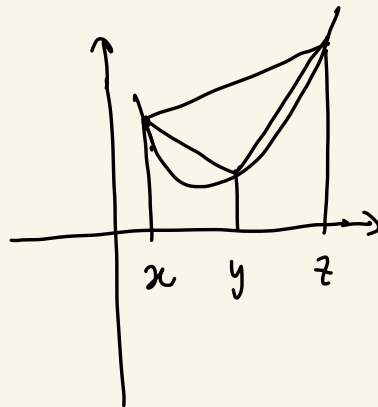
$f'(x)$

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

$y \rightarrow z \downarrow$

$f'(z)$

$\Rightarrow f'$ È CRESCENTE



⊆ f' CRESCENTE, SUPP. PER ASSURDO

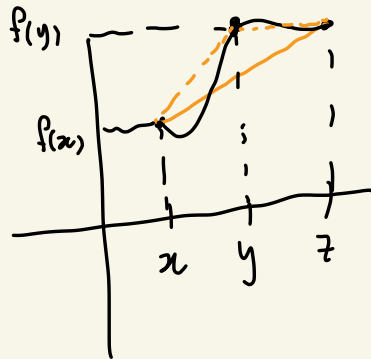
f NON CONVESSA, CIOTÈ $\exists x < y < z$ T.C.

$$f(y) > f(x) + \frac{f(z) - f(x)}{z - x} (y - x)$$

IN PART.

$$f'(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > \frac{f(z) - f(y)}{z - y} = f'(\beta)$$

PER LAGRANGE $\exists \alpha \in (x, y), \beta \in (y, z)$ T.C.
ASSURDO



COR: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ DERIV. 2 VOLTE

$$f \text{ CONVESSA} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$$

COR: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ CONVESSA E DERIV. 2 VOLTE IN x_0

$$\Rightarrow f''(x_0) \geq 0$$

LO STESSO VALE PER f CONCAVA CON ≤ 0 INVECE
DI ≥ 0 .

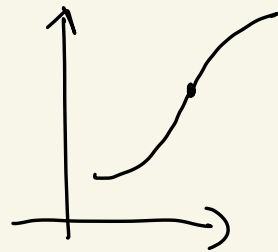
OSS: IL SEGNO DI f'' DEFINISCE GLI INTERVALLI
DI CONVESSITÀ E CONCAVITÀ DI f

DEF: $f: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, f DERIVABILE IN x_0 ,
 f "CAMBIA CONCAVITÀ" IN x_0

CIOÈ f È CONV. IN $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ E CONCAVA
IN $(x_0, x_0 + \varepsilon)$

o VICEVERSO, ALLORA x_0 SI DICE

PUNTO DI FLESSO PER f



DEF: $f: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ CONT. IN x_0 ,

CAMBIA CONCAVITÀ IN x_0 ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow +\infty \text{ o } \rightarrow -\infty$$

ALLORA x_0 È UN PUNTO DI FLESSO

A TANGENTE VERTICALE.

PROP. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I INTERVALLO APERTO

f CONVESSA $\Rightarrow$

① f CONTINUA IN I

② $\forall x \in I \quad \exists \quad \frac{df}{dx^-}(x) \leq \frac{df}{dx^+}(x)$

DERIV. SINISTRA $\searrow$ DERIVATA DESTRA $\swarrow$

③ $x \leq y \Rightarrow \frac{df}{dx^-}(x) \leq \frac{df}{dx^+}(y)$

④ $\text{disc}\left(\frac{df}{dx}\right) = \text{disc}\left(\frac{df}{dx^+}\right)$ INS. NUMERABILE
 $f \in \text{DERIVABILE } \forall x \notin \text{disc}\left(\frac{df}{dx^+}\right)$

DI PUNTI ANGOLI

DIN: BASTA MOSTRARE ② E ③, FISSANDO $y \in I$.

$$\forall x < y < z$$

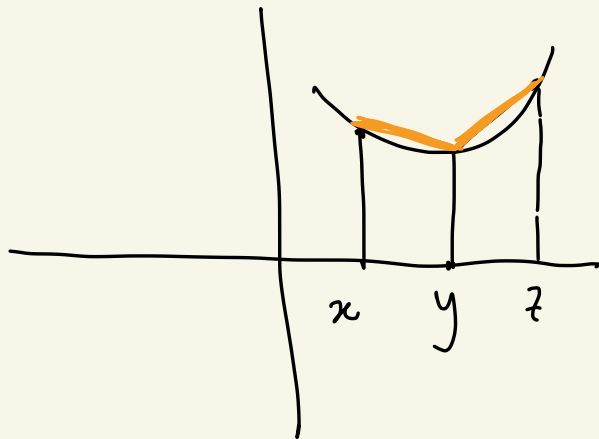
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$



MONOTONO
CRESCENTE IN x



MONOTONO
CRESCENTE IN z



②



FACENDO IL LIMITE $x \rightarrow y$ E $z \rightarrow y$ SI HA $\frac{df}{dx^-}(y) \leq \frac{df}{dx^+}(y)$

③ SEGUE DALLA MONOTONIA DEI RAPP. INCREMENTALI



STUDI DI FUNZIONE

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad D = \text{DOMINIO DI } f$$

OBIETTIVO: TRACCIARE UN GRAFICO QUALITATIVO DI f
IN $\mathbb{R}^2$

$$\Gamma_f = \{ (x, y) : y = f(x), x \in D \} \subseteq \mathbb{R}^2$$



GRAFICO DI f

PASSI PRINCIPALI:

① DOMINIO MASSIMALE di f

② SEGNO di f

③ SINFETRIE: PARI ($f(x) = f(-x)$), DISPARI ($f(x) = -f(-x)$)
PERIODICHE ($f(x+T) = f(x)$, T PERIODO)

④ DISCONTINUITÀ

⑤ LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO (INCLUSO $\pm\infty$)

⑥ ASINTOTI (VERTICALI, ORIZZONTALI, OBLIQUI)

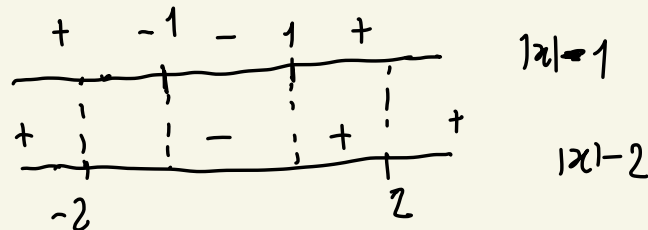
- ① DERIVABILITÀ DI f
- ② DISCONT. DI f' (PUNTI ANGOLOSI, CUSPIDI, FLESSI VERT.)
- ③ SEGNO DI f' , MONOTONIA DI f , MASSIMI E MINIMI LOCALI
- ④ DERIVABILITÀ DI f''
- ⑤ SEGNO DI f'' , INT. DI CONCAVITÀ / CONVESSITÀ,
FLESSI, MASSIMI E MINIMI
- ⑥ DISEGNARE IL GRAFICO NEL PIANO CARTESIANO $\mathbb{R}^2$
(CONVIENE FARLO FIN DA SUBITO)

ESEMPLI:

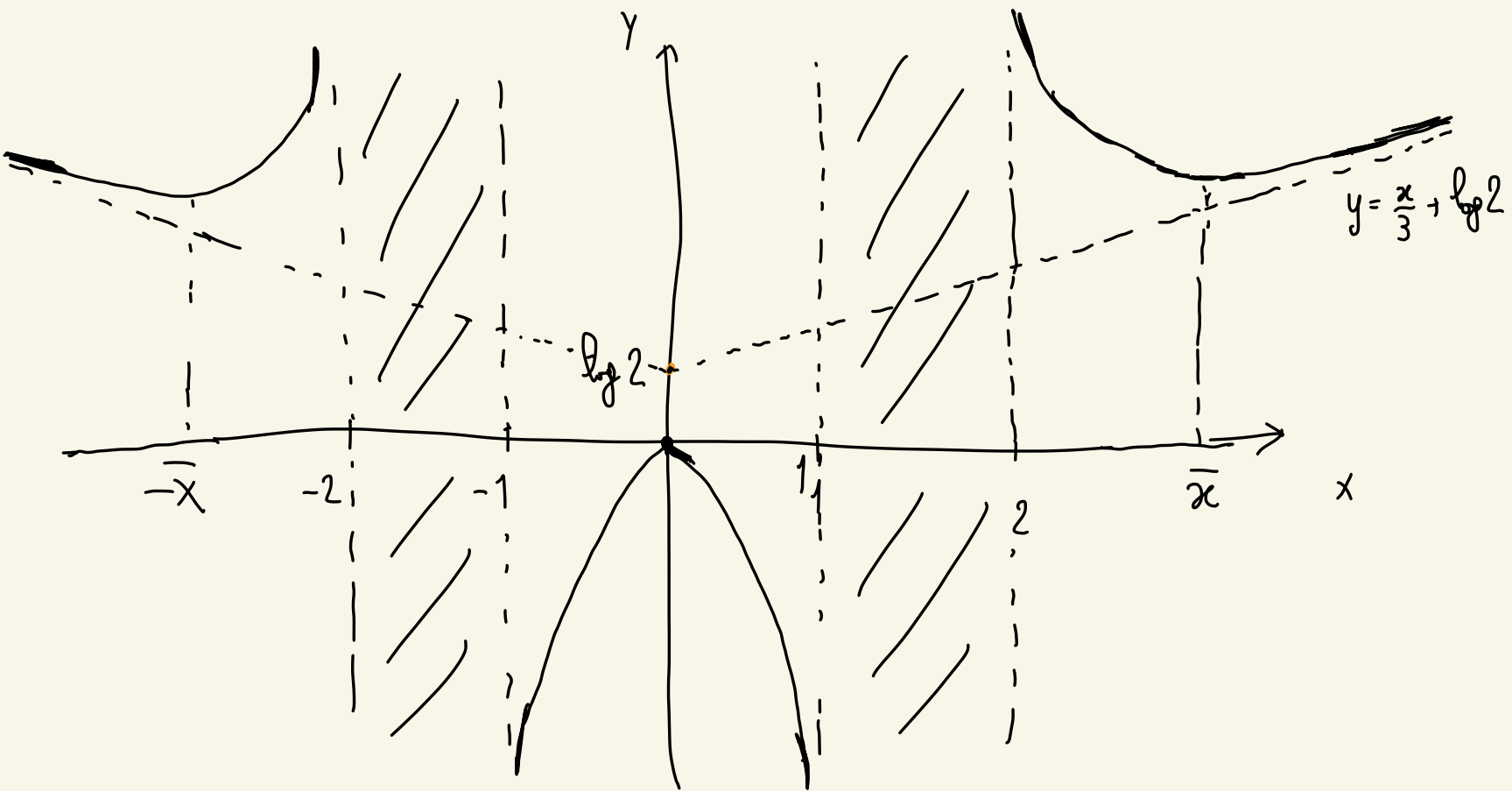
$$f(x) = \frac{|x|}{3} + \log \left(2 \frac{|x|-1}{|x|-2} \right)$$

f pari, BASTA STUDIARLA PER $x \geq 0$

$$\text{Don } f = \left\{ x : \frac{|x|-1}{|x|-2} > 0 \right\}$$



$$= (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$$



$$f(0) = 0 + \log(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{3} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \log \left(2 \frac{|x|-1}{|x|-2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{2}{3} + \lim_{x \rightarrow 2^+} \log \left(2 \frac{|x|-1}{|x|-2} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ASINTOTIC OBL: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \log \left(2 \cdot \frac{x-1}{x-2} \right) = \frac{1}{3}$

↗ $\log 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{x}{3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(2 \frac{x-1}{x-2} \right) = \log 2$$

$$y = \frac{x}{3} + \log 2$$

ASINTOTO OBLIQUO

$$f'(x) \quad \text{PER } x > 0$$

$$f(x) = \frac{x}{3} + \log \left(\frac{x-1}{x-2} \right) + \log 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{x-2}{x-1} \left(\frac{x-1}{x-2} \right)' = \frac{1}{3} + \frac{\cancel{x-2}}{x-1} \frac{x-2 - (x-1)}{(\cancel{x-2})^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{x^2 - 3x + 2 - 3}{3(x-1)(x-2)} = \frac{x^2 - 3x - 1}{3(x-1)(x-2)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 0 \quad \text{sgn}(f') = \text{sgn}(x^2 - 3x - 1)$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

f' cambia segno per $\bar{x} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \in (3, 4)$

UNICO
PUNTO
STAZIONARIO
CON $x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \frac{1}{6}$$

f' PAR) f' DISPAR)

PUNTO ANGOLOSO IN $x = 0$

calcoliamo, per $x > 0$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{3} \left(\frac{x^2 - 3x + 2 - 3}{x^2 - 3x + 2} \right)' = \frac{1}{3} \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)' \\ &= \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)' = - \frac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{3 - 2x}{(x^2 - 3x + 2)^2} \end{aligned}$$

$$\operatorname{sgn} f'' = \operatorname{sgn}(3 - 2x) \quad \text{per } x > 0$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{in } (0, 1) \quad \text{e} \quad f''(x) > 0 \quad \text{in } (2, +\infty)$$

f concava

f convessa

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

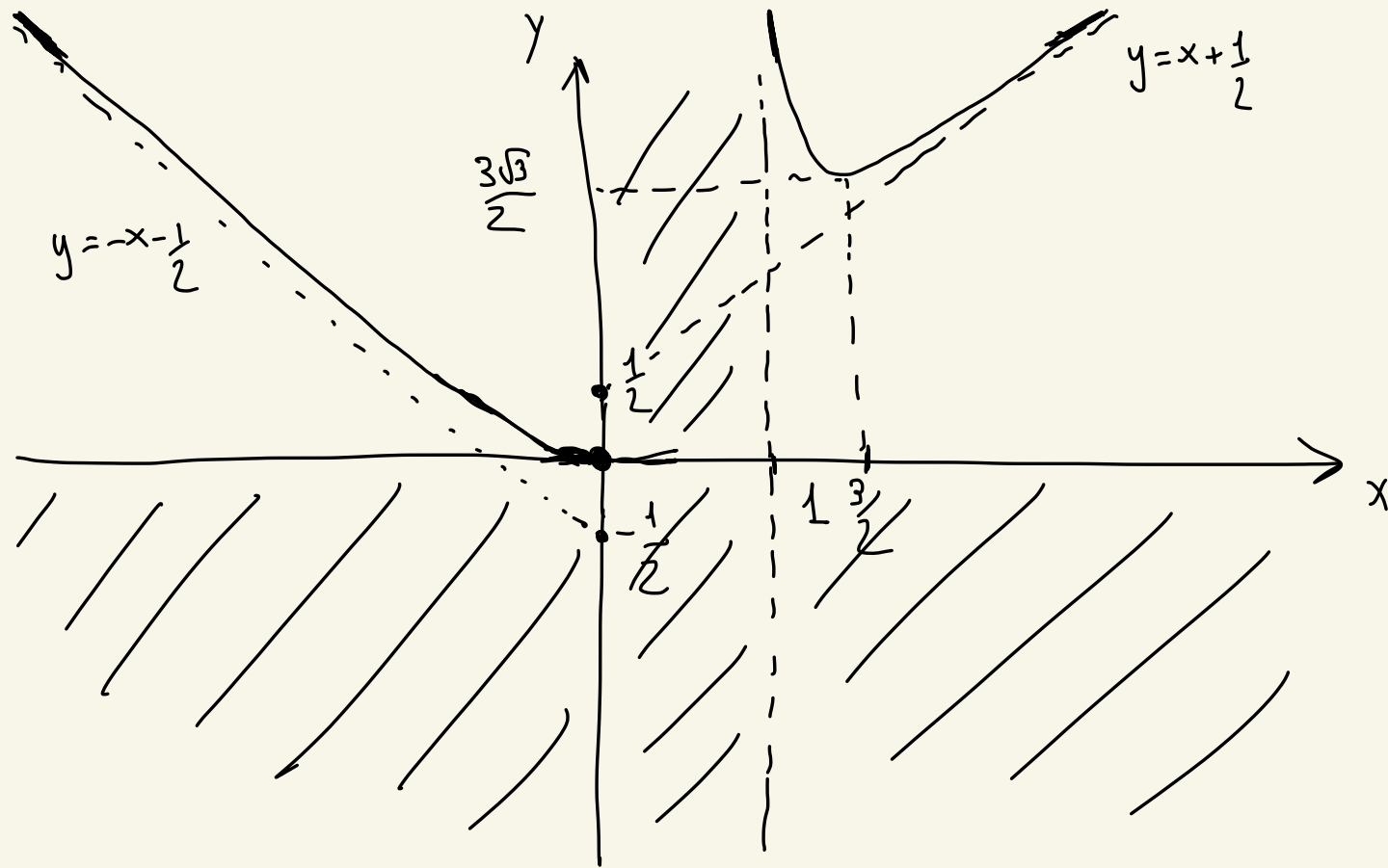
$$\text{Dom } f : x \neq 1, \frac{x^3}{x-1} \geq 0$$

$$\odot \text{ Dom } f = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$$

$$f(0) = 0$$

$\odot$ NON CI SONO SIMMETRIE

$$\odot f(x) > 0, \forall x \neq 0 \quad x \in \text{Dom } f$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = +\infty \quad \text{ASINT. VERTICALE } x=1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \quad \left(f \text{ si comporta come } |x| \right)$$

ASINTOTI OBLIQUI:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} \frac{x^3}{x-1}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x \right)}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x-1) \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x \right)} = \frac{1}{2}$$

$\sim 2x^2$

$$y = x + \frac{1}{2}$$

AS. OBLIQUO PER $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^2(x-1)}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{(x-1) \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x \right)} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{y = -x - \frac{1}{2}}$$

AS. OBLIQUO PER $x \rightarrow -\infty$

CALCOLIAMO $f'(x) = \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \right)' =$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x-1}{x^3}} \left(\frac{x^3}{x-1} \right)' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x-1}{x^3}} \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x-1}{x^3}} \cdot \frac{x^2}{(x-1)^2} (2x-3)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{27}{8} \cdot 2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

UNICO PT STAB.

E NUNO LOCALE

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-\frac{1}{x^3}} \cdot x^2 = 0$$

$$\exists \frac{df}{dx}(0) = 0 \quad x=0 \text{ minimo assoluto di } f$$

$$f'(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) \sqrt{\frac{x}{(x-1)^3}}$$

$$f''(x) = \sqrt{\frac{x}{(x-1)^3}} - \sqrt{\frac{(x-1)^3}{x}} \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)}{(x-1)^4} \stackrel{?}{\geq} 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \stackrel{?}{\leq} (x-1)^4 \cdot \frac{x}{\cancel{(x-1)^3}} = x^2 - x$$

$$x^2 + \underbrace{\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}}_{-x} \stackrel{?}{\leq} x^2 - x \quad \boxed{\text{OK}}$$

$$\Rightarrow f''(x) > 0 \quad \forall x \in \text{Dom } f$$

f è CONVESSA IN $(-\infty, 0]$ E IN $(1, +\infty)$.



FORMULA DI TAYLOR

PROBLEMA: DATA $f(x)$ REGOLARE,
 $x_0 \in \text{dom}(f)$, $n \in \mathbb{N}$,
TROVARE IL POLINOMIO $P_n(x)$
DI GRADO n
CHE "APPROSSIMA MEGLIO" f
VICINO A x_0

ES: $n=0$ $P_0(x) = f(x_0)$, $n=1$ $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

CI OÈ CERCHIANO $P_n(x)$ T.C.

$$f(x) = P_n(x) + o(|x-x_0|^n)$$

OSS: NON È DETTO CHE ESISTA

OSS: SE ESISTE È UNICO

$$P, Q \text{ DI GRADO } n, \quad P-Q = o(|x-x_0|^n)$$

$$\Rightarrow P=Q$$

DEF: Data $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I APERTO, DIFF. n -VOLTE in $x_0 \in I$

$$T_n(f, x_0)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

SI DICE POLINOMIO DI TAYLOR DI GRADO n
(di f in x_0).

OSS:

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \forall k \leq n$$

TEO (PEANO): f DIFF. n volte in x_0 , $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + o(|x-x_0|^n)$$

↳ RESTO DI PEANO

DIN: APPLICO L'HÔPITAL $(n-1)$ VOLTE A

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{n! (x-x_0)}$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0) \right] = 0.$$

COR (MAX/MIN): f DERIV. n volte in x_0 , $n > 1$,

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall 1 \leq k < n, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad \Rightarrow$$

- ① n dispari, f è LOCALMENTE STRETT. MONOTONA
- ② n pari, $f^{(n)}(x_0) > 0$, x_0 MIN. LOCALE STRETTO
- ③ " $f^{(n)}(x_0) < 0$, x_0 MAX. " " "

DIM. $f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$

VEDIAMO ②, CIOÈ n PARI E $f^{(n)}(x_0) > 0$

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ T.C. } |o(x-x_0)^n| \leq \frac{f^{(n)}(x_0)}{2n!} (x-x_0)^n \quad \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$$

$$\Rightarrow f(x) \geq \frac{f^{(n)}(x_0)}{2n!} (x-x_0)^n \quad \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$$

$$\Rightarrow x_0 \text{ È UN MIN. LOCALE}$$

GLI ALTRI PUNTI SI FANNO IN MODO SIMILE.

calcolo di $T_n(f, x_0)$

$$\odot T_n(af + bg, x_0) = a T_n(f, x_0) + b T_n(g, x_0)$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$\odot T_n(f', x_0) = T_n(f, x_0)'$$

ESEMPIO: $f(x) = e^x \quad x_0 = 0$ $f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k$ $f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad f^{(k)}(0) = k!$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$$

$$f(x) = \log(1+x) \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$T_{n+1}(f)' = T_n(f') = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$$

$$T_{n+1}(f) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \cancel{f(0)}$$

$$f(x) = \sin(x) \quad f'(x) = \cos(x) \quad f'' = -\sin(x) \quad f''' = -\cos(x), \quad f^{(4)}(x) = f(x)$$

$$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ANALOGANTE $f = \cos(x) \quad x = 0$

ANALOGANTE $f = \cos(x) \quad x = 0$

$$T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

OSS: f PARI $\in x_0 = 0 \Rightarrow T_n(x)$ HA SOLO
n termini con ESPONENTE PARI

f DISPAR1 " $\Rightarrow$ " DISPAR1

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x_0 = 0$$

$$T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k}$$

$$f(x) = \arctan(x) \quad x_0 = 0$$

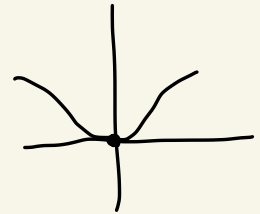
$$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} \Rightarrow T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$(1+x)^\alpha \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$\alpha \neq 0 \quad x_0 = 0$$

OSS: ANCHE SE f È DERIVABILE ∞ VOLTE IN x_0
NON È DETTO CHE $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) = f'(x)$ PER $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

ES:
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0 \quad \forall n \quad (\text{VERIFICARE})$$

$$\Rightarrow T_n(x) = 0 \quad \forall n$$

DOMANDA: QUANDO $T_n(x) \rightarrow f(x)$ IN UN
INTERNO DI x_0 ?

TEO (LAGRANGE)

f DERIVABILE $(n+1)$ -VOLTE IN $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + \frac{f^{(n+1)}(t) \underbrace{(x-x_0)^{n+1}}_{(n+1)!}}{(n+1)!} \quad \begin{array}{l} t \in (x_0, x) \\ \text{ o } t \in (x, x_0) \end{array}$$

OSS: $n=0$ È IL TEO DI L.

RESTO DI
LAGRANGE

Lemma: g DERIVABILE $(n+1)$ -VOLTE IN (a, b)

$$g^{(k)}(a) = g^{(k)}(b) = 0 \quad 0 \leq k \leq n$$

$$\Rightarrow \exists t \in (a, b) \text{ t.c. } g^{(n+1)}(t) = 0$$

Din:

APPLICO ROLLE A g

$$\exists t_1 \text{ t.c. } g'(t_1) = 0, \quad \text{APPLICO R. A } g' \text{ IN } [a, t_1]$$

$$\exists t_2 \text{ t.c. } g''(t_2) = 0, \quad \dots \text{APPLICO R. A } g^{(n)} \text{ IN } [a, t_n]$$

$$\exists t = t_{n+1} \text{ t.c. } g^{(n+1)}(t) = 0.$$

DIN. (TEOREMA):

Fissiamo $x > x_0$,

APPLICO IL LEMMA IN (x_0, x) , CON

$$f(t) = f(t) - T_n(t) - \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} (t - x_0)^{n+1}$$

$$g^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall k \leq n, \quad g(x) = 0$$

$$\Rightarrow \exists t \in (x_0, x) \text{ t.c. } g^{(n+1)}(t) = 0$$

$$0 = f^{(n+1)}(t) - (n+1)! \cdot \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} \Rightarrow f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

COR:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

DIN:

$$e^x - T_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^t \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (|t| < |x|)$$

$$|e^x - T_n(x)| \leq \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n} 0.$$

DEF: $f \in \infty\text{-DER. IN } x_0$, LA SERIE $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$
SI DICE SERIE DI TAYLOR DI f IN x_0 .

LA STESSA FUNZIONE PER $\sin(x)$, $\cos(x)$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

È ANCHE PER $\log(1+x)$, $\frac{1}{1+x}$, $\arctan(x)$, $\frac{1}{1+x^2}$
MA SOLO PER $\boxed{|x| < 1}$ (VERIFICA)

ES: APPROSS. E A DEVO DEL' $1/1000$

$$e = T_n(1) + R_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + R_n$$

$$R_n = \frac{e^{t_n}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

$$t_n \in (0, 1)$$

$$\text{SCELGO } n \text{ T.C. } R_n < \frac{1}{1000}, \text{ cioè } \frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{1000}$$

$$(n+1)! > 3000 \quad n=6$$

$$T_6(1) = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}$$

DEF: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ A APERTO, $f \in C^\infty(A)$

È ANALITICA IN A SE

$\forall x_0 \in A$ f COINCIDE CON LA SUA

SERIE DI T. IN x_0 , IN UN INTORNO DI x_0 .

ES: e^x ANAL. SU $\mathbb{R}$, $\cos(x)$ È ANAL. SU $\mathbb{R}$

$\frac{1}{1+x}$ È ANAL. SU $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, ...

$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \\ 0 \end{cases}$ È ANAL. IN $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ANCHE SE $f \in C^\infty(\mathbb{R})$



SERIE DI TAYLOR E FUNZIONI ANALITICHE

SE $f \in C^\infty$ IN x_0 , LA SERIE $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$

SI DICE SERIE DI TAYLOR DI f IN x_0 .

PROP. $f(x) = \sum_n a_n (x-x_0)^n \quad x \in I = (x_0-R, x_0+R)$

$R > 0$ RAGGIO DI CONV. $\Rightarrow$

$f \in C^\infty(I)$ E $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

DIN. ABBANDONATO VISTO $f \in C^\infty$ E $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^k}{dx^k} (x-x_0)^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n n!}{(n-k)!} (x-x_0)^{n-k}$
 $\Rightarrow f^{(k)}(x_0) = a_k k!$

DEF: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ APERTO, $f \in C^\infty(A)$

È ANALITICA SE $\forall x_0 \in A \exists r$ T.C.

$$f(x) = \sum \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \quad \forall x \in (x_0-r, x_0+r) \subseteq A.$$

PROP: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ $x \in I = (x_0-R, x_0+R)$
 $R > 0$ RAGGIO DI CONV.

$\Rightarrow f$ È ANALITICA IN I , cioè $\forall x_1 \in I$

$$\exists r = r(x_1) \text{ T.C.} \quad f(x) = \sum_n \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x-x_1)^n \quad x \in (x_1-r, x_1+r)$$

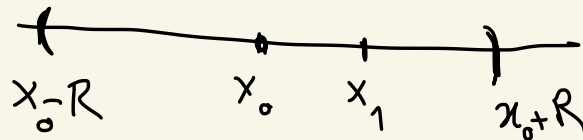
Lemma:

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad |x| < 1$$

Din:

$k=0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)}$ DERIVO k -VOLTE $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$

Din:
(PROP.) FISSIAMO $x_1 \in I$



E CALCOLIAMO

$$f^{(k)}(x_1) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} (x_1 - x_0)^{n-k},$$

$$\forall r < R \quad |a_n| \leq \frac{C}{r^n}$$

$$|f^{(k)}(x_1)| \leq \frac{C}{r^k} \sum_{h=k}^{\infty} \frac{n!}{(h-k)!} \left(\frac{|x_1 - x_0|}{r} \right)^{n-k} \quad r \in (|x_1 - x_0|, R)$$

APPLICO IL LEMMA

$$|f^{(k)}(x_1)| \leq \frac{C \cdot r}{r^{k+1}} \frac{k!}{\left(1 - \frac{|x_1 - x_0|}{r}\right)^{k+1}} = \frac{C r}{r - |x_1 - x_0|} \cdot \frac{k!}{(r - |x_1 - x_0|)^k}$$

$$= C' \cdot \frac{k!}{(r - |x_1 - x_0|)^k}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f^{(k)}(x_1)}{k!} \right| \leq \frac{C'}{(r - |x_1 - x_0|)^k} \Rightarrow \text{LA SERIE } \sum \frac{f^{(k)}(x_1)}{k!} (x - x_1)^k$$

CONVERGE

SE $|x - x_1| < r - |x_1 - x_0|$ IN PART. CONV. IN

$$(x_1 - (R - |x_1 - x_0|), x_1 + R - |x_1 - x_0|).$$

SI A $f(x)$ LA SUA SOMMA, VOGLIO VEDERE CHE

$f = f_-$ SIANO S_n LE SOMME PARZIALI,

QUINDI $S_n \xrightarrow{n} f$, STUDIANDO $f - S_n$. PER LAGRANGE

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(\gamma)|}{(n+1)!} |x - x_1|^{n+1}$$

γ È TRA x E x_1

$$\left| f(x) - S_n(x) \right| \leq \frac{C |x - x_1|^{n+1}}{(r - |y - x_0|)^{n+1}} \xrightarrow{n} 0$$

$$x \in (x_1 - r_1, x_1 + r_1)$$

$$s \in |x - x_1| < r - |y - x_0|$$

$$\text{E' VERO SE } r_1 < R - |x_0 - x_1| - r_1,$$

$$f = g \Rightarrow f \text{ ANALITICA.}$$

COR: f, g ANALITICHE SU I INTERVALLO APERTO

$$\forall k \quad f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) \Rightarrow f = g \text{ su } I$$

DIN: SIA $\Lambda = \left\{ x \in I \text{ t.c. } f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x) \quad \forall k \right\}$

$$x \in \Lambda \Rightarrow \exists r \text{ t.c. } (x-r, x+r) \subseteq \Lambda \text{ e } f = g \text{ in } (x-r, x+r)$$

Λ È APERTO IN I .

VICEVERSA $x_n \in \Lambda \quad x_n \rightarrow x \in I \Rightarrow$ PER CONT. $x \in \Lambda$

Λ È CHIUSO IN $I \Rightarrow \Lambda = I$.

COR: $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ ANALIT. I INT. APERTO

$I \ni x_n$ succ. conv. in I , $x_n \rightarrow x_0 \in I$

$$f(x_n) = g(x_n) \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad f = g \text{ in } I.$$

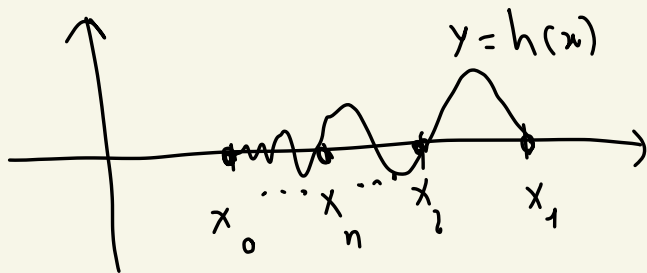
OSS: f, g ANALIT. $\Rightarrow (af + bg)$ ANALITICA $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

CIÒÈ LE FUNZ ANALITICHE SONO UNO SP. VETTOR.

DIN: CONSIDERIAMO $h(x) = f(x) - g(x)$ ANALIT.

CON $h(x_n) = 0 \quad \forall n$. VAGLIAMO MOSTRARE $h \equiv 0$.

PASSANDO AL LIMITE HO $h(x_0) = 0$.



PER ROLLE $\forall x_n \exists x_n^{(n)} \in \overset{(x_0, x_n)}{\sigma} \underset{(x_n, x_0)}{\sigma} \text{ T.C. } h'(x_n^{(n)}) = 0 \quad \forall n$

PASSANDO AL LIMITE $h'(x_0) = 0$

ITERANDO L'ARGOMENTO HO $h^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall k$

$\Rightarrow h \equiv 0$ CIOE $f \equiv g$ IN I .

(COR. PRECEDENTE)

COR: e^x È ANALITICA IN $\mathbb{R}$

$\sin x, \cos x$ " "

$\frac{1}{1 \pm x}$ È ANALITICA IN $(-1, 1)$

$P(x)$ POL. È ANALIT. SU $\mathbb{R}$

TEO: ① f, g ANALITICHE IN $I \Rightarrow f \cdot g$ ANAL.

② " " " , $g \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ ANAL.

③ $f: I \rightarrow J$ ANAL. $g: J \rightarrow K$ ANAL. $\Rightarrow g \circ f$ È ANAL.

④ $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ANAL. CON I INTERV. E $f' \neq 0$ IN I

$\Rightarrow f^{-1}$ È ANALIT.

PROP.: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ANALITICA $(\Rightarrow)$

$f \in C^\infty(I)$ E $\forall x_0 \in I \exists r > 0, C, R > 0$

T.C. $\frac{|f^{(k)}(x)|}{k!} \leq CR^k \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r).$

DIM.: COME NELLA PROP. PRECEDENTE

DEF: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ANALITICA

I INTERVALLO

$$g = \bigcup \left\{ h: h: J \rightarrow \mathbb{R} \text{ ANAL.}, J \supseteq I \text{ INTERVALLO} \right\}$$

DOVE $h_1: J_1 \rightarrow \mathbb{R} \in h_2: J_2 \rightarrow \mathbb{R}$ $h|_I = f$

$$h_1 \cup h_2(x) = \begin{cases} h_1(x) & x \in J_1 \\ h_2(x) & x \in J_2 \end{cases}$$

BEN DEFINITO
DATO CHE $h_1 = h_2$ SU $J_1 \cap J_2$

$g: J_{\max} \rightarrow \mathbb{R}$ SI DICE **PROLUNGAMENTO ANALITICO** DI f
ED È UNIVOC. DETERMINATO DA f .



INTEGRABILITÀ FUNZ. CONTINUE

TEO (HEINE-CANTOR): $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA

$C \subseteq \mathbb{R}$ COMPATTO (ES: $C = [a, b]$)

$\Rightarrow f \in \text{UNIF. CONTINUA}$,

CIOÈ $\forall \varepsilon \exists \delta$ T.C.

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

$$x, y \in C$$

Dim:

PER ASSURDO, $\exists \varepsilon > 0$ T.C. $\forall \delta_n = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}$

$\exists x_n, y_n \in C$ T.C. $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$

C COMPATTO $\exists n_k$ T.C. $x_{n_k} \rightarrow x$ e $y_{n_k} \rightarrow y$ PER $k \rightarrow \infty$,

CON $x = y$.

$$\varepsilon \leq \lim_n |f(x_n) - f(y_n)| = |f(x) - f(x)| = 0$$

ASSURDO

Oss: $f(x) = x^2$ $\in$ CONT. SU $\mathbb{R}$ MA NON UNIF. CONT.

TEO: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CONT. $\Rightarrow f \in \tilde{\text{INT}}$.

Din f È LIMITATA ED È UNIF. CONT.

FISSIAMO $\varepsilon > 0$ E $n \in \mathbb{N}$ E PRENDIAMO

$$\pi = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b\} \quad \text{CON} \quad t_{k+1} - t_k = \frac{b-a}{n}$$

CALCOLIAMO

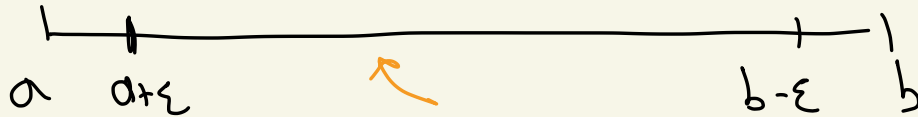
$$\begin{aligned} S(f, \pi) - s(f, \pi) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(t_{k+1} - t_k \right) \left(\sup_{(t_k, t_{k+1})} f - \inf_{(t_k, t_{k+1})} f \right) \\ &\leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\max_{[t_k, t_{k+1}]} f - \min_{[t_k, t_{k+1}]} f \right) \leq \frac{b-a}{n} \cdot n\varepsilon = (b-a) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

SE SCEGLIAMO n T.C. $\frac{b-a}{n} \leq \delta(\varepsilon)$ DATO DALL' UNIF. CONT. DI f .

OSS: LA STESSA DIN. FUNZIONA PER
 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ CONT. E LIMITATA. ($|f(x)| \leq C \forall x$)

INFATTI, FISSIAMO $\varepsilon > 0$ E SIA $\pi = \{t_0, \dots, t_{n+2}\}$

$$\text{T.C. } t_0 = a, t_1 = a + \varepsilon, t_{k+1} - t_k = \frac{b-a-2\varepsilon}{n}, t_{n+1} = b - \varepsilon, t_{n+2} = b$$



UNIFORME IN
n INTERVALLI

$$S(f, \pi) - s(f, \pi) = 4C\varepsilon + \sum_{k=1}^n \frac{b-a-2\varepsilon}{2} \left(\sup_{(t_k, t_{k+1})} f - \inf_{(t_k, t_{k+1})} f \right) \leq 4C\varepsilon + (b-a)\varepsilon$$

PER n GRANDE

OSS: PIÙ IN GENERALE LA DIN. FUNZIONA PER
 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA CON $\text{disc}(f)$ FINITO.

ANCORA PIÙ IN GENERALE SI HA:

TEO: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA CON
 $\text{disc}(f)$ FINITO O NUMERABILE $\Rightarrow$
 f È INTEGRABILE,

TEO (VITALI-LEBESGUE)

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA È INTEGRABILE $(\Rightarrow)$

$\text{disc}(f)$ È TRASCURABILE (O DI MISURA NULLA)

DEF: $E \subseteq \mathbb{R}$ È TRASCURABILE SE $\forall \epsilon \exists \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$I_n \subseteq \mathbb{R}$ INTERVALLO T.C.

$$E \subseteq \bigcup_n I_n \quad \text{e} \quad \sum_n |I_n| \leq \epsilon.$$

OSS: E NUMERABILE $\Rightarrow E$ TRASC. MA NON VALE VICEVERSA
(INSIEME DI CANTOR)

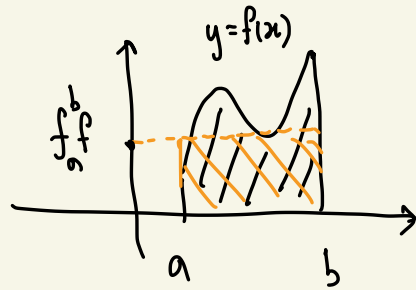
TEO (MEDIA INTEGRALE)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CONT.

$\exists \bar{x} \in [a, b]$ T.C.

$$f(\bar{x}) = \int_a^b f(x) dx := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

$$\Leftrightarrow (b-a) f(\bar{x}) = \int_a^b f(x) dx.$$



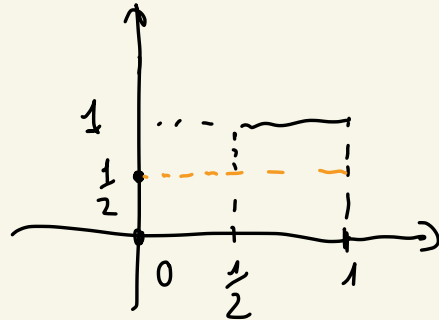
Din: SI HA $(b-a) \min_{[a,b]} f \leq \int_a^b f \leq (b-a) \max_{[a,b]} f$

$$\Rightarrow \min_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \max_{[a,b]} f$$

$$\Rightarrow \exists \bar{x} \text{ t.c. } f(\bar{x}) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Oss: f INT. NON CONT. NON $\in$ VERO

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



$$\int_0^1 f = \frac{1}{2}$$

DEF: SI INDICA CON

$$R(I) = \{ f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ INTEGRABILI} \}$$

PROP: (LINEARITÀ DI $\int$)

$$\textcircled{1} \quad c \cdot f \in R(I) \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f, g \in R(I) \Rightarrow \int_I c f = c \int_I f,$$

$$\textcircled{2} \quad f + g \in R(I) \quad \text{e} \quad \int f + g = \int f + \int g.$$

IN PART. $R(I)$ È UNO SP. VETTORIALE

È $f \mapsto \int_I f$ È UNA FUNZIONE LINEARE SU $R(I)$.

sin:

①

$a \geq 0$

$$S(a f, \pi) = a S(f, \pi)$$

$\forall \pi$

$$s(a f, \pi) = a s(f, \pi)$$

$$\begin{aligned} \sup_{\pi} s(a f, \pi) &= a \sup_{\pi} s(f, \pi) = a \inf_{\pi} S(f, \pi) = \inf_{\pi} S(a f, \pi) \\ &= a \int_I f \end{aligned}$$

(1bis) $-f \in R(I)$ INFACT

$$S(-f, \pi) = -s(f, \pi) \quad \forall \pi$$

$$s(-f, \pi) = -S(f, \pi)$$

$$\Rightarrow \sup_{\pi} s(-f, \pi) = \inf_{\pi} S(-f, \pi) = - \int_I f$$

$$\textcircled{2} \quad S(f+g, \pi) = \sum_k (t_{k+1} - t_k) \sup_{(t_k, t_{k+1})} (f+g) \leq$$

$$\sum_k (t_{k+1} - t_k) (\sup f + \sup g) = S(f, \pi) + S(g, \pi)$$

$$s(f+g, \pi) \geq s(f, \pi) + s(g, \pi) \quad \forall \pi$$

$$\int f + \int g = \sup_{\pi_1} s(f, \pi_1) + \sup_{\pi_2} s(g, \pi_2) = \sup_{\pi} (s(f, \pi) + s(g, \pi))$$

$$\leq \sup_{\pi} s(f+g, \pi) \leq S(f+g, \pi) \leq \inf_{\pi_1} S(f, \pi_1) + \inf_{\pi_2} S(g, \pi_2)$$

$$= \int f + \int g \Rightarrow \tau \in S1$$

PROP. (ADDITIVITÀ RISP. AL DOMINIO)

$$\underset{\text{INTERVALLO}}{I} = I_1 \cup I_2, \quad I_1 \cap I_2 = \emptyset, \quad f \in \mathcal{R}(I)$$

$$\Rightarrow f|_{I_1} \in \mathcal{R}(I_1), \quad f|_{I_2} \in \mathcal{R}(I_2) \text{ e}$$

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

Dim. Siano $f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in I_1 \\ 0 & x \in I_2 \end{cases}$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & x \in I_1 \\ f(x) & x \in I_2 \end{cases}$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

DICO CHE $f_1 \in R(I)$ E $\int_I f_1 = \int_{I_1} f$ E LO STESSO PER f_2 .

SE QUESTO È VERO, PER LINEARITÀ,

$$\int_I f = \int_I (f_1 + f_2) = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

FISSIAMO $\varepsilon > 0$ E SIA π PARTIZIONE DI I

T.C. $S(f, \pi) - s(f, \pi) \leq \varepsilon$. POSSO SUPP. $I_1 \leq I_2$

E $\pi_1 = \pi|_{I_1}$ SIA PARTIZIONE DI I_1 E $\pi_2 = \pi|_{I_2}$ PER I_2 .
PER QUESTO AGGIUNGO A π IL PUNTO $\sup I_1 = \inf I_2$.

OSS: $f, g \in \mathcal{R}(I), f \leq g \Rightarrow \int_I f \leq \int_I g$

PROP: $f \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}(I) \quad \& \quad \left| \int f \right| \leq \int |f|.$

DM: $\forall \epsilon, \pi$ t.c. $S(f, \pi) - s(f, \pi) \leq \epsilon$

$$\sup_{(t_k, t_{k+1})} f - \inf_{(t_k, t_{k+1})} f \geq \sup_{(t_k, t_{k+1})} |f| - \inf_{(t_k, t_{k+1})} |f| \quad \Leftarrow \quad |a-b| \geq ||a|-|b|| \quad \forall a, b$$

$$\Rightarrow S(|f|, \pi) - s(|f|, \pi) \leq S(f, \pi) - s(f, \pi) \leq \epsilon \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}(I).$$

OSSERVANDO CHE $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \Rightarrow$

$$-\int |f| \leq \int f \leq \int |f| \quad (\Rightarrow) \quad \left| \int f \right| \leq \int |f|.$$

$$\text{SI HA} \quad S(f|_{I_1}, \pi_1) - s(f|_{I_1}, \pi_1) \leq S(f, \pi) - s(f, \pi) \leq \varepsilon$$

$$\varepsilon \quad S(f|_{I_2}, \pi_2) - s(f|_{I_2}, \pi_2) \leq S(f, \pi) - s(f, \pi) \leq \varepsilon.$$

$$\Rightarrow f|_{I_1} \in R(I_1) \text{ e } f|_{I_2} \in R(I_2).$$

$$\text{SI HA ANCHE} \quad S(f|_{I_1}, \pi_1) = S(f_1, \pi) \text{ e } s(f|_{I_1}, \pi_1) = s(f_1, \pi)$$

$$\Rightarrow f_1 \in R(I) \text{ con } \int_I f_1 = \int_{I_1} f \text{ e } f_2 \in R(I) \text{ con } \int_I f_2 = \int_{I_2} f.$$

OSS: QUANTO BETTO SI SCRIVE

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

DOVE

$$I = (a, c)$$

$$I_1 = (a, b) \quad I_2 = [b, c)$$

$$\forall a < b < c$$

PER CONVENZIONE SI PONE

$$\int_a^a f = 0$$

$$\int_a^b f = - \int_b^a f$$

SE

$$a > b, \text{ IN MODO DA}$$

AVERT

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$$



PRIMITIVE E TEOREMA FOND. DEL CALCOLO

DEF: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ FUNZ. INTEGRABILE, $I \subseteq \mathbb{R}$ INTERVALLO,

$F: I \rightarrow \mathbb{R}$ FUNZ. DERIVABILE

SE $F' = f$, F SI DICE **PRIMITIVA** DI f

OSS: SE F_1, F_2 SONO PRIMITIVE DI $f \Rightarrow$

$$(F_1 - F_2)' = f - f = 0 \Leftrightarrow F_1(x) = F_2(x) + C \quad \forall x \in I$$

PER $C \in \mathbb{R}$

SI INDICA CON $\int f dx = \{ F: I \rightarrow \mathbb{R}, F' = f \}$

INTEGRALE INDEFINITO.

TEO: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA, I INT. CHIUSA,
 $x_0 \in I$, SIA $F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad \forall x \in I$,

ALLORA F_{x_0} È UNA PRIMITIVA DI f ,

CIOÈ F_{x_0} È DERIVABILE E $F_{x_0}' = f$.

(LA COSTANTE SI OTTIENE PONENDO $F_{x_0}(x_0) = 0$)

Dim: CALCOLANDO

$$F'_{x_0}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_{x_0}(x+h) - F_{x_0}(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt \right) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_h) = f(x)$$

↑
MEDIA

$$x_h \in (x-|h|, x+|h|) \cap I$$

OSS: $a, b \in I$, $a < b$,

$$\Rightarrow \int_a^b f(t) dt = F_{x_0}(b) - F_{x_0}(a) = F(b) - F(a)$$

DOVE F È UNA QUALUNQUE PRIMITIVA DI f .

IN PARTICOLARE PER CALCOLARE $\int_a^b f$

È SUFF. TROVARE UNA PRIMITIVA.

COME SI CALCOLA UNA PRIMITIVA DI f

OSS: DIVERSAMENTE DALLA DERIVATA,
NON SEMPRE LA PRIMITIVA DI UNA "FUNZ. ELEMENTARE"
E ANCORA UNA "FUNZ. ELEMENTARE".

ES: e^{x^2} , e^{-x^2} , $e^{\frac{x}{x}}$, $\frac{\sin x}{x}$...

TABELLA DELLE PRIMITIVE

DERIVATE

F	F'
C	0
x^a	$a x^{a-1}$
$\log x $	$\frac{1}{x}$
e^{ax}	$a e^{ax}$
e	$a e$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

PRIMITIVE

f	$\int f$
0	C
x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad a \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log x + C$
e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax} + C \quad a \neq 0$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$

REGOLE DI INTEGRAZIONE

$$\textcircled{1} (F \pm G)' = F' \pm G' \Rightarrow \int f \pm g = \int f \pm \int g \quad (\text{LINEARITÀ})$$

$$\textcircled{2} (F \cdot G)' = F'G + FG' \Rightarrow$$

$$FG + c = \int F'G + \int FG'$$

$$\boxed{\int F'G = F \cdot G - \int FG'}$$

CON ESTREMI DIVENTA

$$\int_a^b F'G = FG \Big|_a^b - \int_a^b FG'$$

$$FG \Big|_a^b = F(b)G(b) - F(a)G(a)$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

ES: ① $\int \underbrace{\log(x)}_G \cdot \underbrace{1}_{F'} = x \log x - \int \frac{1}{x} \cdot x = x \log x - x + C$

② $\int e^x \sin(x) = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) =$
 $= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) + \int e^x (-\sin(x))$

③ $\int e^x \sin(x) = \frac{e^x}{2} (\sin(x) - \cos(x)) + C$

④ $\int e^x P(x) \quad \int \sin(x) P(x) \quad P \text{ POLINOMIO}$
 $(\text{INTEGRA } e^x \sigma \sin(x) \in \text{SI DERIVA } P(x))$

$$\textcircled{1} \quad \int \sin(x)^2 = \int \sin(x) \cdot \sin(x)$$

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

$$= -\sin(x) \cos(x) + \int \cos^2(x)$$

$$= -\sin(x) \cos(x) + \int 1 - \int \sin^2(x)$$

$$\int \sin^2(x) = \frac{1}{2} (x - \sin(x) \cos(x)) + C$$

$$\textcircled{3} \quad (F \circ \varphi)' = F'(\varphi) \cdot \varphi' \quad f = F'$$

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C = \int f(y) dy \Big|_{y=\varphi(x)}$$

CON GLI ESTREMI DIVENTA
 $\varphi(b)$

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy \quad \left(\begin{array}{l} \text{ATTENZIONE AL} \\ \text{CAMBIO DI ESTREMI} \end{array} \right)$$

INTEGRAZIONE
 PER SOSTITUZIONE

$$y = \varphi(x) \Rightarrow \varphi'(x) dx = dy$$

FORMALENTE

ES ① $\int F(e^x) \cdot e^x = \int F(y) dy \Big|_{y=e^x}$

① $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \int \frac{1}{1+y^2} \Big|_{y=e^x} = \arctan(e^x) + C$

$\bar{F}(y) = \frac{1}{1+y^2}, \quad y=e^x$

① $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{1}{y} dy \Big|_{y=\varphi(x)} = \log |\varphi(x)| + C$
 $F(y) = \frac{1}{y}$

$$\textcircled{1} \int \tan(x) = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = - \int \frac{\varphi'}{\varphi} = - \log |\cos(x)| + C$$

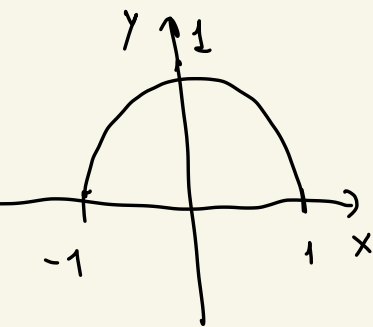
$$\varphi(x) = \cos(x)$$

$$\textcircled{2} \int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin(t)^2} \cos(t) dt$$

$$x = \sin(t) \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. = \int \cos(t)^2 dt \quad (\cos(t) \geq 0)$$

$$dx = \cos(t) dt \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. = \frac{1}{2} (t + \sin(t) \cos(t)) + C$$

$$t = \arcsin(x) \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. = \frac{1}{2} (\arcsin(x) + x \sqrt{1-x^2}) + C$$



$$\text{Area under curve} = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} = \left. \arcsin(x) + x\sqrt{4-x^2} \right|_{-1}^1 =$$

$$= 2 \arcsin(1) = \pi$$

$$\textcircled{1} \int f(\sqrt{x}) dx = \frac{1}{2} \int \frac{f(y)}{y} dy \Big|_{y=\sqrt{x}}$$

$$y = \sqrt{x} \quad dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

PART 1

$$\text{Ans: } \int x e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \int \frac{e^y y^2}{y} = \frac{1}{2} \int e^y \cdot y \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{2} e^y \cdot y - \frac{1}{2} \int e^y$$

$$= \frac{1}{2} e^y (y-1) + C \Big|_{y=\sqrt{x}} = \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x}-1) + C$$

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \int \sqrt{1+\sinh(t)^2} \cosh(t) dt = \int \cosh(t)^3 dt$$

SUBSTITUTIONE:

$$x = \sinh(t)$$

$$dx = \cosh(t) dt$$

$$\begin{aligned} &= \sinh(t) \cosh(t) - \int \sinh(t)^2 \\ &= t + \sinh(t) \cosh(t) - \int \cosh(t)^2 = \frac{1}{2} (t + \sinh(t) \cosh(t)) + C \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{arcsinh}(x) + x \sqrt{1+x^2}) + C \end{aligned}$$

FUNKT. HYPERBOLICHE

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x)' = \cosh(x), \quad \int \sinh(x) = \cosh(x) + C$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x)' = \sinh(x), \quad \int \cosh(x) = \sinh(x) + C$$

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$$

$$x = \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{e^{2t} - 1}{2e^t} \Rightarrow e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0$$

$$e^t = x + \sqrt{1+x^2} \quad t = \operatorname{arcsinh}(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$



INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad P, Q \text{ polinomi}$$

CALCOLARE $\int f(x) dx$

PROCEDIAMO PER PASSI ;

① FATTORIZZARE $Q(x)$

$$Q(x) = \prod_{i=1}^n Q_i(x)^{\alpha_i}$$

$$\alpha_i \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \deg Q_i = \deg Q$$

$$\deg Q_i \in \{1, 2\}$$

② $\frac{P}{Q} = P_1 + \frac{P_2}{Q}$ con $\deg P_2 < \deg Q$

$$\textcircled{3} \quad \frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{P_{i,j}(x)}{Q_i(x)^j}$$

$$(\deg P < \deg Q)$$

$$\text{con } \deg P_{i,j} < \deg Q_i$$

$$\text{IN PART. } \deg P_{i,j} \in \{0, 1\}$$

VEDIAMO I DIVERSI CASI

$$\frac{P}{Q^j} \quad \deg Q \in \{1, 2\}, \quad \deg P < \deg Q, \quad j \in \mathbb{N}$$

$$\textcircled{4} \quad \deg Q = 1, \quad P(x) = 1, \quad \int \frac{1}{(x+a)^j} dx = \begin{cases} \log|x+a| & j=1 \\ -\frac{1}{j-1} \cdot \frac{1}{(x+a)^{j-1}} & j>1 \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \deg Q = 2, \quad Q(x) = x^2 + ax + b,$$

A meno di molt. per costante scriviamo

$$P(x) = (2x + a) + c = Q'(x) + c$$

$$\int \frac{P}{Q^j} = \int \frac{Q'(x)}{Q(x)^j} + c \int \frac{1}{Q(x)^j}$$

$$y = Q(x) \quad \int \frac{Q'(x)}{Q(x)^j} dx = \int \frac{1}{y^j} dy = \begin{cases} \log|y| & j=1 \\ -\frac{1}{j-1} \frac{1}{y^{j-1}} & j>1 \end{cases}$$

⑥ RESTA DA FARE $\int \frac{1}{Q(x)^i} \text{ con } \deg Q = 2$

$$Q(x) = x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$$

$$= \left(b - \frac{a^2}{4}\right) \left[\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}} \right)^2 + 1 \right]$$

$$= \left(b - \frac{a^2}{4}\right) (y^2 + 1)$$

$$y = \frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}}$$

↑

CAMBIO DI
VARIABILE

RESTA QUINDI DA FARE

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^j}$$

$$j=1, \quad \int \frac{1}{x^2+1} = \arctan(x) + C$$

$j > 1$, ABBASSIAMO IL GRADO INTEGRANDO PER PARTI:

$$I_j = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^j} = I_{j-1} - \frac{1}{2} \int \frac{2x \cdot x}{(x^2+1)^j} = I_{j-1} + \frac{1}{2(j-1)} \frac{x}{(x^2+1)^{j-1}} - \frac{1}{2(j-1)} I_{j-1}$$

$$\frac{2x}{(x^2+1)^j} = -\frac{1}{j-1} \frac{1}{(x^2+1)^{j-1}} \quad \Bigg| \quad = \left(1 - \frac{1}{2(j-1)}\right) I_{j-1} + \frac{1}{2(j-1)} \frac{x}{(x^2+1)^{j-1}}$$

OSS: $\int P(x) \log Q(x) = \int P(x) \operatorname{arctan}(Q(x))$

INTEGRANDO PER PARTI DIVENTANO INT. DI FUNZ. RAZIONALI

ES: $\int \frac{1}{x^3-1} dx$ $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

CERCHIANO A, B, C TALI CHE

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)}{x^3-1}$$

$$= \frac{(\overset{0}{A+B})x^2 + (\overset{0}{A-B+C})x + \overset{1}{A-C}}{x^3-1}$$

OTTENIAMO IL SISTEMA LINEARE 3×3

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=1 \end{cases} \quad 2A-B=1 \Rightarrow 3A=1$$

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = A-1 = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \frac{2x+4}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$\int \frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3} \log|x-1| - \frac{1}{6} \log(x^2+x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}, \quad y = x+\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} = \int \frac{1}{y^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2y}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{y^2+a^2} dy = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{y}{a}\right) + C \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left[\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{y}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{y^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^2}{y^2+a^2} \right]$$

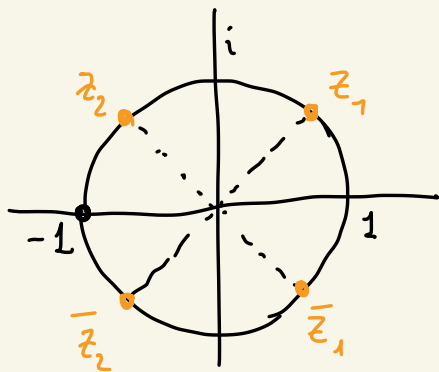
$$\int \frac{1}{x^4+1} dx$$

$$\begin{aligned} x^4+1 &= (x^2+ax+1)(x^2-ax+1) = (x^2+1)^2 - a^2x^2 \\ &= x^4 + 2x^2 + 1 - a^2x^2 \Rightarrow a^2=2, \quad a=\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$x^4+1 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

ALTERNATIVAMENTE POSSIAMO FATTORIZZARLO IN $\mathbb{C}$

$x^4+1=0 \quad x \in \mathbb{C}$ SONO LE RADICI 4^{te} DI -1



$$-1 = e^{i\pi} \quad \sqrt[4]{-1} = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$x^4 + 1 = \underbrace{(x - z_1)(x - \bar{z}_1)} \underbrace{(x - z_2)(x - \bar{z}_2)}$$

$$= (x^2 - (z_1 + \bar{z}_1)x + 1) \cdot (x^2 - (z_2 + \bar{z}_2)x + 1)$$

$$= (x^2 - \sqrt{2}x + 1) (x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1} =$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1) + (Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)}{x^4+1}$$

$$1 = (A+C)x^3 + (\sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D)x^2 + (A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D)x + B+D$$

DA CUI IL SISTEMA LINEARE 4×4 :

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ \sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D = 0 \\ \cancel{A} + \sqrt{2}\cancel{B} + \cancel{C} - \sqrt{2}D = 0 \Rightarrow B = D = \frac{1}{2} \\ B + D = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A - C = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

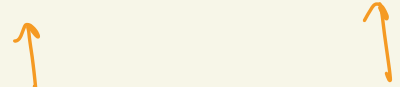
$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{1}{2} \frac{\frac{x}{\sqrt{2}} + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{1}{2} \frac{\frac{x}{\sqrt{2}} - 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{2x + 2\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{2x - 2\sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right)$$

$$+ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right)$$

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$$



$$x^2 + \sqrt{2}x + 1 = \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$y = x + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \int \frac{1}{y^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}y) + C$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}x + 1) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} = \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}x - 1) + C$$

$$\int \arctan(x) \cdot 1 = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2}$$

$$= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

CI SONO ALCUNI INTEGRALI

CHE SI RIDUCONO AD INTEGRALI

DI FUNZ. RAZIONALI

SOSTITUZIONI RAZIONALIZZANTI

SIA $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ UNA FUNZ. RAZIONALE

$$\odot \quad \int R(e^x) dx = \int \frac{R(e^x)}{e^x} \cdot e^x dx = \int \frac{R(y)}{y} dy$$

$$y = e^x \quad dy = e^x dx$$

↑
FUNZ. RAZIONALE

$$\odot \int R(\sin x, \cos x) dx = 2 \int \underbrace{R\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)}_{\text{FUNZ. RAZIONALE}} \frac{1}{1+y^2} dy$$

$$y = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad x = 2 \arctan(y)$$

$$dx = \frac{2}{1+y^2} dy$$

$$\sin(x) = \frac{2y}{1+y^2}$$

$$\cos(x) = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

ES: $\int \frac{dx}{\sin(x)} = \int \frac{\cancel{1+y^2}}{\cancel{2y}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{1+y^2}} dy = \log|y| + C = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$

$$\textcircled{a} \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\left[\text{TÍPICO CASO} \int R(\sqrt[n]{x}) dx \quad y = \sqrt[n]{x} \right]$$

$$\textcircled{b} \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

$$x = a \sin(t) \quad dx = a \cos(t)$$

$$= \int R(a \sin(t), a \cos(t)) a \cos(t) dt$$

$$\odot \int R(x, \sqrt{x^2 + c}) dx$$

$$c > 0 \quad x = \sqrt{c} \sinh(t)$$

$$c < 0 \quad x = \sqrt{-c} \cosh(t)$$

DIVENTA DEL TIPO

$$\int \tilde{R}(e^t) dt$$

IN ALTERNATIVA SI PUÒ PORRE

$$(x+y)^2 = x^2 + c$$

$$y = -x + \sqrt{x^2 + c}$$

$$x = \frac{-y^2 + c}{2y}, \quad dx = \left(\frac{-y^2 + c}{2y} \right)' dy$$

DIVENTA DEL TIPO $\int \tilde{R}(y) dy$

ES:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{1}{\cosh(t)} \cdot \cosh(t) dt = t + C$$

$$x = \sinh(t) \quad dx = \cosh(t) dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arcsinh}(x) + C = \log(-x + \sqrt{x^2+1}) + C$$



INTEGRALI IMPROPRI (GENERALIZZATI)

$$f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

f INTEGRABILE SU $[a, c] \quad \forall c < b$

SI DICE CHE f È INT. (IN SENSO IMPROPRIO) SU $[a, b)$

$$\text{SE } \exists \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}$$

LO STESSO SI PUÒ FARE PER $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

CON $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ E f INT. SU $[c, b] \quad \forall c > a$.

PIU' IN GENERALE $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,

È INT. SE, DATO $x_0 \in (a, b)$, f È INT. SU $(a, x_0]$ E $[x_0, b)$

E SI PONE
$$\int_a^b f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^b f.$$

OSS: LA DEF. NON DIPENDE DALLA SCELTA DI x_0 .

ESEMP1: $f(x) = x^\alpha \quad x \in (0, 1] \quad \alpha \in \mathbb{R}$

① $\alpha \geq 0 \quad f \in \text{INT.}$

② $\alpha < 0 \quad f \text{ NON È LIMITATA. } \text{FISSO } \varepsilon > 0$

È CALCOLO

$$(\alpha \neq -1) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left. \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right|_{\varepsilon}^1$$

$$= \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{\alpha+1} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} & \alpha > -1 \\ +\infty & \alpha < -1 \end{cases}$$

$$(\alpha = -1) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log(x) \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty$$

$$\Rightarrow f(x) = x^{\alpha} \in \text{INT. SU } (0, x_0] \Leftrightarrow \alpha > -1$$

SE CONSIDERO $[1, +\infty)$, CON LO STESSO CALCOLO,

$$x^{\alpha} \in \text{INT. SU } [x_0, +\infty) \Leftrightarrow \alpha < -1$$

OSS: x^{α} NON È NAI INT. SU $(0, +\infty)$

$$f(x) = e^{-x} \text{ su } [0, +\infty)$$

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M e^{-x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} -e^{-x} \Big|_0^M = \lim_M (1 - e^{-M}) = 1$$

TEO (CONFRONTO)

$$f, g : [x_0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad f, g \text{ INT. su } [x_0, M] \quad \forall M < +\infty,$$

$$\odot \quad f \leq g \quad \text{e} \quad g \text{ INTEGR. su } [x_0, +\infty) \Rightarrow f \text{ INT. su } [x_0, +\infty)$$

$$\odot \quad f \leq g \quad \text{e} \quad f \text{ NON E' INT.} \Rightarrow g \text{ NON E' INT. su } [x_0, +\infty).$$

OSS: $f \geq 0$, f NON È INT. SU $[x_0, +\infty)$ $(\Leftrightarrow) \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{\eta} f = +\infty$

INFATTI $M \rightarrow \int_{x_0}^{\eta} f$ È UNA FUNZ. MONOTONA CRESCENTE

COR: f, g DEF. POSITIVE PER $x \rightarrow +\infty$
(CONFRONTO ASINTOTICO) $f \sim g$, CIOÈ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f}{g} = 1$ (VA BENE ANCHE $f \sim c \cdot g$)
 $c \in (0, +\infty)$

$\Rightarrow$ f È INT. SU $[x_0, +\infty)$ $(\Leftrightarrow) g$ È INT. SU $[x_0, +\infty)$

DIN. DEL TEOREMA:

$$0 \leq f \leq g \quad g \text{ int. su } [x_0, +\infty)$$

$$0 \leq \int_{x_0}^n f(x) dx \leq \int_{x_0}^n g(x) dx$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^n f(x) dx \leq \int_{x_0}^{+\infty} g < +\infty$$

$$\Rightarrow n \rightarrow \int_{x_0}^n f \quad \text{è CRESCENTE E LIMITATA}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^n f = \int_{x_0}^{+\infty} f \leq \int_{x_0}^{+\infty} g.$$

DEF: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ INTERVALLO ANCHE ILLIMITATO

f È ASSOLUTAMENTE INT. SU I SE

- ① f È INT. SU $[a, b] \subseteq I$ CON $-\infty < a < b < +\infty$,
- ② $|f|$ È INT. (IN SENSO IMPROPRIO) SU I .

TEO: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ASSOL. INT. $\Rightarrow f \in \mathcal{I}^1$ INT.

DIN: $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ PARTE POSITIVA DI f

$f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ PARTE NEGATIVA

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad x \in I$$

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

IN PART. $0 \leq f^+(x) \leq |f|(x)$

PER CONTROLLO $f^+(x)$ E $f^-(x)$ SONO INT. SU I

$\Rightarrow$ PER ADDITIVITÀ DEL LIMITE $f \in \mathcal{I}^1$ INT. E $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$.

OSS: $|f| \in \text{INT. su } I \Rightarrow$

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-, \quad \int_I |f| = \int_I f^+ + \int_I f^-$$

IN PARTICOLARE

$$\left| \int_I f \right| = \left| \int_I f^+ - \int_I f^- \right| \leq \int_I f^+ + \int_I f^- = \int_I |f|$$

ESEMPIO: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^\alpha}$

① su $(0, 1]$ $\sin(x) \sim x$ PER $x \rightarrow 0$

$$f(x) \sim x^{1-\alpha} \quad \text{PER } x \rightarrow 0$$

$$f \in \text{INT.} \iff 1-\alpha > -1 \quad \text{cioè } \alpha < 2$$

(CONFR. ASINTOTICO)

(2) su $[1, +\infty)$

ASSOLUTA INTEGRABILITÀ:

$$\left| \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{INT. SE } \alpha > 1$$

$\Rightarrow f \in \text{INT. PER } \alpha > 1$

PER $\alpha \in (0, 1]$?

CONSIDERIAMO

$$\int_1^M \frac{\sin(x)}{x^\alpha} = \overset{\text{PER PARTI}}{-\frac{\cos(x)}{x^\alpha} \Big|_1^M - \alpha \int_1^M \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}}}$$

$$\left| \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}} \right| \leq \frac{1}{x^{\alpha+1}} \quad \text{INT. SU } [1, +\infty)$$

PER IL TEOREMA $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}} = \int_1^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}}$

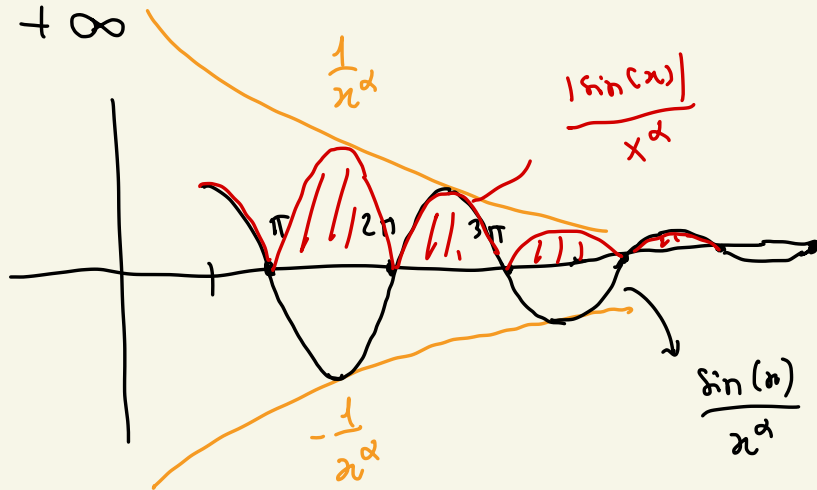
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left. \frac{\cos(x)}{x^{\alpha}} \right|_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos(n)}{n^{\alpha}} - \cos(1) \right) = -\cos(1)$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}} = \cos(1) - \alpha \int_1^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}} = \int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}}$$

③ SI PUÒ MOSTRARE CHE $\frac{\sin(x)}{x^\alpha}$ NON È

ASSOL. INT. SU $[1, +\infty)$ PER $\alpha \in (0, 1]$,

CIOÈ $\int_1^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^\alpha} = +\infty$



$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^{\alpha}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x^{\alpha}} \geq \frac{1}{\pi^{\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{\alpha}} = +\infty$$

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x^{\alpha}} = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(k\pi+y)|}{(k\pi+y)^{\alpha}} dy = \int_0^{\pi} \frac{\sin(y)}{(k\pi+y)^{\alpha}} \geq \frac{\int_0^{\pi} \sin(y)}{(k+1)^{\alpha} \pi^{\alpha}}$$

$$x = k\pi + y, \quad y \in [0, \pi]$$

OSS: SCRIVENDO

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}}$$

PER $\alpha > 0$

SI PUÒ OTTENERE L'INTEGRABILITÀ DI $\frac{\sin(x)}{x^{\alpha}}$
DAL CRITERIO DI LEIBNIZ.

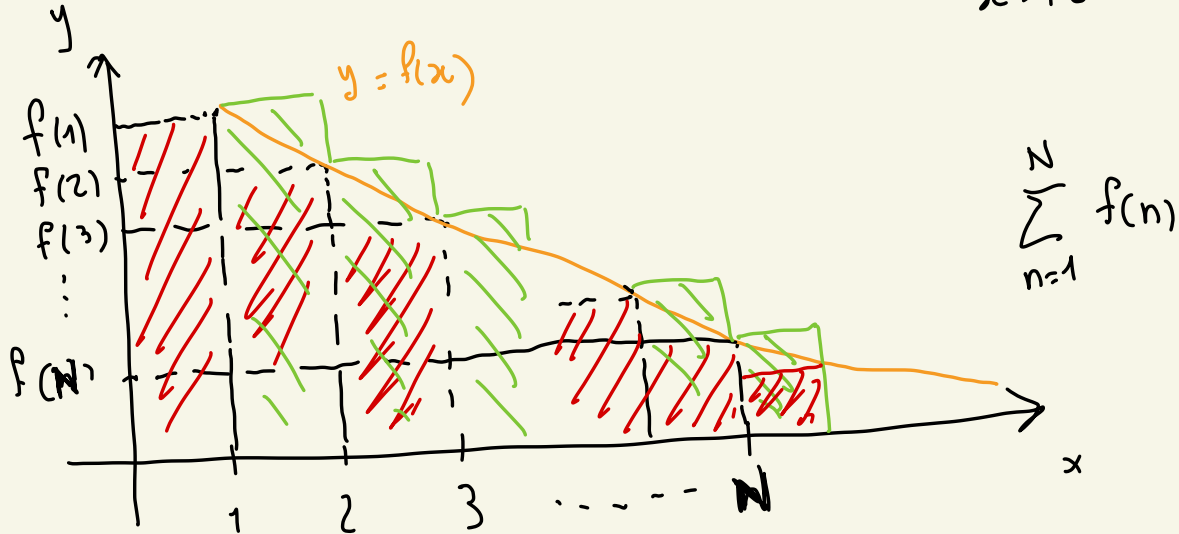


CRITERIO INTEGRALE PER LE SERIE

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$a_n = f(n) \quad f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \geq 0, \quad f \text{ DECRESCENTE}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$



SI HANNO LE DISUGUAGLIANZE

$$\sum_{n=1}^N f(n) \geq \int_1^{N+1} f(x) dx \geq \sum_{n=2}^{N+1} f(n)$$

$$\forall N \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^N f(n) \geq \int_1^N f(x) dx \geq \sum_{n=2}^N f(n)$$

$$\forall N \geq 2$$

TEO: $f \geq 0$, f DECRESCENTE, ALLORA

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty \iff \int_1^{\infty} f(x) < +\infty.$$

DIM: SEGUE DAL TEOREMA DI CONFRONTO PER I LIMITI.

OSS: PASSANDO AL LIMITE $N \rightarrow +\infty$ SI OTTIENE

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \geq \int_1^{\infty} f(x) dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - f(1)$$

ES: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$

LA SERIE CONV. $(\Rightarrow) \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx < +\infty \quad (\Rightarrow) \alpha > 1$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ CONV. $(\Rightarrow) \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^{\alpha}} < +\infty$

$y = \log x$

$\int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{y^{\alpha}} \quad (\Rightarrow) \alpha > 1$

OSS: CONSIDERIAMO LA SUCCESSIONE

$$b_N = \sum_{n=1}^N f(n) - \int_1^N f(x) dx \in [0, f(1)] \quad \forall N$$

IN PART. b_N È LIMITATA, INOLTRE

$$b_{N+1} - b_N = \sum_{n=1}^{N+1} f(n) - \sum_{n=1}^N f(n) - \int_1^{N+1} f(x) dx + \int_1^N f(x) dx$$

$$= f(N+1) - \int_N^{N+1} f(x) dx \leq 0, \quad \text{CIOÈ}$$

$$b_N \text{ È } \underline{\text{DECRESCENTE}} \Rightarrow b_N \xrightarrow[N]{\quad} \inf_N b_N = b \in [0, f(1)]$$

QUINDI
$$\sum_{n=1}^N f(n) = \int_1^N f(x) dx + b + o(1) \quad \text{PER } N \rightarrow +\infty$$

CON $b \in [0, f(1)]$.

QUESTO VALE ANCHE QUANDO
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = +\infty.$$

ESEMPLI: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_1^N \frac{1}{x} = \log(N)$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \log(N) + \gamma + o(1)$$

$$\gamma \in [0, 1]$$

$$\gamma \approx 0,577...$$

COSTANTE DI EULERO-MASCHERONI

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad \alpha \in (0, 1)$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} = \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + \gamma_\alpha + o(1), \quad \gamma_\alpha \in [0, 1]$$

$$\int_1^N \frac{1}{x^\alpha} = \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^N = \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

$\alpha > 1$, POSSIAMO ANDARE $N \rightarrow +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} + \gamma_\alpha, \quad \gamma_\alpha \in [0, 1]$$

ESERCIZI SU INTEGRALI IMPROPRI

STUDIARE L'INTEGRABILITÀ DI $\int_0^1 |\log(x)|^\alpha dx$

AL VARIARE DI $\alpha \in \mathbb{R}$.

① VEDIAMO $x \rightarrow 1^-$. $\log(x) = x - 1 + o(1) \quad x \rightarrow 1^-$
 $\Rightarrow |\log(x)|^\alpha = (1-x)^\alpha + o(1)$

$$\int_{1-\varepsilon}^1 |\log x|^\alpha \sim \int_{1-\varepsilon}^1 (1-x)^\alpha < +\infty \quad \text{PER } \boxed{\alpha > -1}$$

② VEDIAMO $x \rightarrow 0^+$

$$x^\beta |\log x|^\alpha \rightarrow 0 \quad \forall \beta > 0$$

$$|\log x|^\alpha = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right) \quad \forall \beta > 0$$

PER $x \rightarrow 0^+$

PER CONFRONTO CON

$\frac{1}{x^\beta}$, $\beta \in (0, 1)$, SI HA

$$\int_0^\varepsilon |\log x|^\alpha < +\infty \quad \forall \alpha$$

$\varepsilon \in (0, 1)$

$$\Rightarrow |\log x|^\alpha \in \text{INT. SU } (0, 1) \quad (\Leftrightarrow) \quad \alpha > -1$$

STUDIARE L'INT. DI $\int_0^{\infty} x^{\alpha} \sin(x^{\beta}) dx$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

FACCIAMO IL CAMBIO DI VARIABILE $y = x^{\beta}$ ($\beta \neq 0$),

SE $\beta = 0$ ABBIAMO $\int_0^{\infty} x^{\alpha} \sin(x^{\beta}) = \sin(1) \int_0^{\infty} x^{\alpha} = +\infty \quad \forall \alpha$.

$$x = y^{\frac{1}{\beta}}, \quad dx = \frac{1}{\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1} dy$$

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} \sin(x^{\beta}) \sim \frac{1}{|\beta|} \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{\beta}-1} \cdot y^{\frac{\alpha}{\beta}} \sin(y) dy = \frac{1}{|\beta|} \int_0^{\infty} y^{\gamma} \sin(y) dy$$
$$\gamma = \frac{\alpha+1-\beta}{\beta}$$

$$y^{\gamma} \sin(y) \in \text{INT. SU } [1, +\infty) \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{\gamma < 0}$$

$$y^{\gamma} \sin(y) \sim y^{\gamma+1} \in \text{INT. SU } (0, 1] \quad (\Rightarrow) \quad \gamma + 1 > -1$$

PER $y \rightarrow 0$

$$\boxed{\gamma > -2}$$

$$y^{\gamma} \sin(y) \in \text{INT. SU } (0, +\infty) \quad (\Rightarrow) \quad -2 < \gamma < 0$$

$$x^{\alpha} \sin(x^{\beta}) \in \text{INT. SU } (0, +\infty) \quad (\Rightarrow)$$

$$\boxed{-2 < \frac{\alpha + 1 - \beta}{\beta} < 0} \quad \in \quad \boxed{\beta \neq 0}$$

AD ESEMPIO, SE $\alpha = 0$, $\sin(x^\beta)$ È INT. $\Leftrightarrow$

$$-2 < \frac{1-\beta}{\beta} < 0,$$

$$\textcircled{1} \beta > 0 \Rightarrow -2\beta < 1-\beta < 0 \Rightarrow \boxed{\beta > 1}$$

$$\textcircled{2} \beta < 0 \Rightarrow -2\beta > 1-\beta > 0 \Rightarrow -\beta > 1 \Rightarrow \boxed{\beta < -1}$$

PER $x \rightarrow 0$ NON CI SONO ALI PROBLEMI.



EQUAZIONE DIFFERENZIALI ORDINARIE

INCIGNITA È UNA FUNZIONE $y(x): I \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

n È L'ORDINE
DELL'EQUAZIONE

SE F È LINEARE IN $y^{(j)}(x)$, CIÒÈ

$$F(x, y, \dots, y^{(n)}(x)) = \sum_{j=0}^n a_j(x) y^{(j)}(x) + b(x)$$

L'EQ. SI DICE
AUTONOMA

SE F NON DIPENDE
DA x

L'EQ. SI DICE LINEARE, SE $b(x)=0$ SI DICE
LINEARE OMOGENEA

ES: $y''(x) = 0$ INTEGRANDO

$y'(x) = c$ "

$y(x) = cx + d$ $c, d \in \mathbb{R}$

SONO TUTTE LE SOL. DELL'EQ.

ALLO STESSO MODO $y^{(n)}(x) = 0 \Rightarrow y(x) = P(x)$
 P POLINOMIO $\deg P = n-1$

- NON C'E' UNICITA'
- LO SPAZIO DELLE SOL. HA DIM. n ,
L'INSIEME DELLE SOL. HA n "GRADI DI LIBERTA'"

$$h''(t) = -g \quad \text{CADUTA VERTICALE DI UN "GRANDE"}$$

$$h(t) = -g \frac{t^2}{2} + v_0 t + h_0$$

$$\begin{cases} h(0) = h_0 & \text{ALTEZZA INIZ.} \\ h'(0) = v_0 & \text{VELOCITÀ " } \end{cases}$$

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} F(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

→ n "DATI INIZIALI"

IN MOLTI CASI

CI ASPETTIAMO

SOLUZIONE UNICA

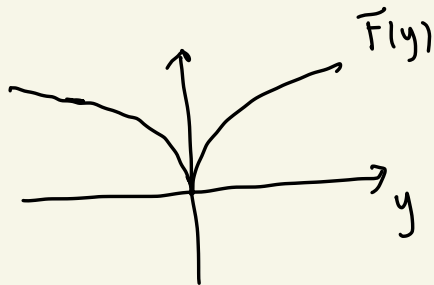
DEL PROBLEMA

DI CAUCHY

OSS. NON È SEMPRE VERO,

$\bar{F}$ DEVE ESSERE ABBASTANZA REGOLARE

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{|y(x)|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

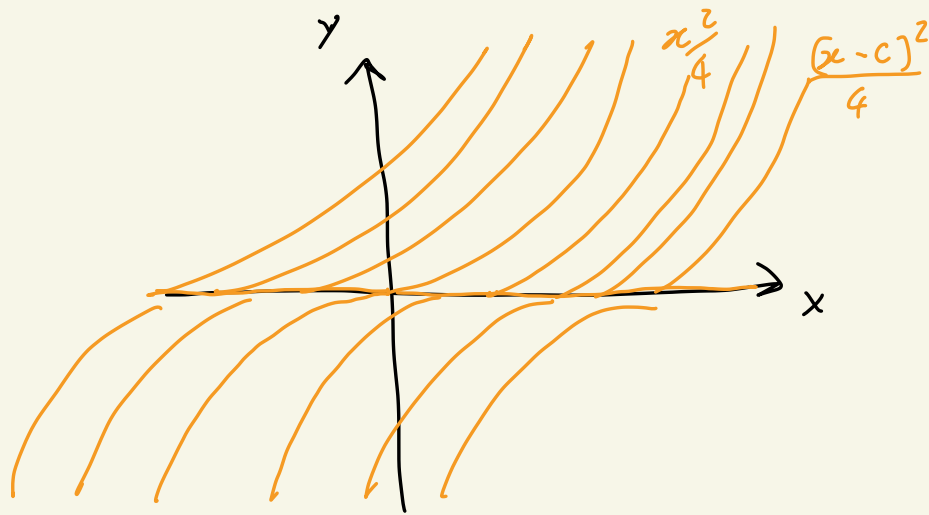


① $y(x) = 0 \quad \forall x$ È soluzione

CERCHIAMO SOL. DEL TIPO $y(x) = ax^2 \quad (x \geq 0)$
 $y'(x) = 2ax = \sqrt{y(x)} = \sqrt{a} \cdot x \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

② $y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} & x > 0 \end{cases}$ È SOLUZIONE

NON C'È UNICITÀ



BAFFO DI
PEANO

OSS: QUESTO FENOMENO NON C'È
SE $F \in C^1$

EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE IN FORMA "NORMALE"

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$x_0 \in (a, b)$$

TEO: (ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE)

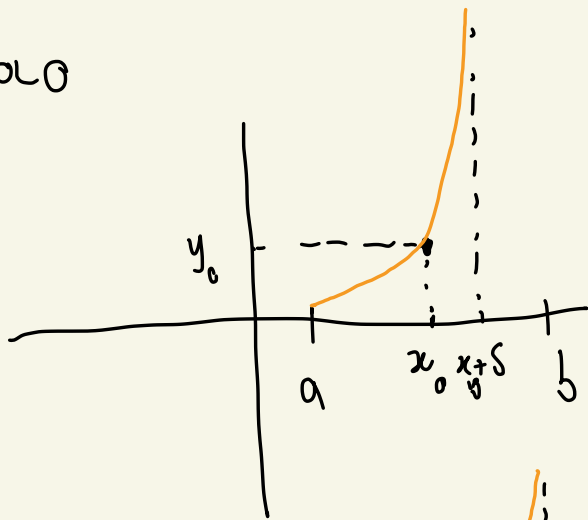
SE f È CONTINUA IN (x, y) È LIPSCHITZIANA IN y ,

$$\text{CIOÈ } |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2| \quad \text{CON } L > 0,$$

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ CON $(x_0 + \delta, x_0 - \delta) \subseteq (a, b)$ E $\exists!$ $y \in C^1((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$
SOL. DEL PROBLEMA DI CAUCHY.

OSS: $\int$ PUO' ESSERE MOLTO PICCOLO

LE SOL. POSSONO AVERE
ASINTOTI VERTICALI



ES:
$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

NON HA
SOL. "GLOBALE"

DIVIDO PER $y^2(x)$

$$\frac{y'}{y^2} = 1$$

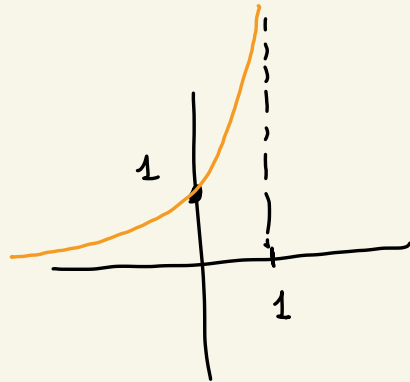
INTEGRO

$$\int \frac{y'}{y^2} = x + C = -\frac{1}{y}$$

$$y(x) = -\frac{1}{x+C}$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$C = -1$$



ESEMPIO: EQUAZIONI LINEARI DEL PRIMO ORDINE
IN FORMA NORMALE

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

$a, b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ FUNZIONI CONTINUE

SIANO NELLE IPOTESI DEL TEO DI ESIST. E UNICITÀ

SI PUÒ TROVARE LA SOL. GENERALE

SIA $\Delta(x)$ UNA PRIMITIVA DI $a(x)$, CIOÈ $\Delta'(x) = a(x)$,

SCRIVIAMO L'EQ $y'(x) - a(x)y(x) = b(x)$

MOLTIPLICHIAMO PER $e^{-\Delta(x)}$ E OTTENIAMO

$$e^{-A(x)} (y'(x) - a(x)y(x)) = \left[e^{-A(x)} y(x) \right]' = e^{-A(x)} b(x)$$

INTEGRANO IN x E OTTENIAMO

$$e^{-A(x)} y(x) = \int e^{-A(s)} b(s) ds + c \quad c \in \mathbb{R}$$

DA CUI

$$y(x) = c e^{A(x)} + \int e^{A(x)-A(s)} b(s) ds$$

AL VARIARE DI $c \in \mathbb{R}$

IN PARTICOLARE, LA SOL. DI

$$\begin{cases} y' = ay + b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\varepsilon \quad y(x) = y_0 e^{\Delta(x)} + \int_{x_0}^x e^{\Delta(x) - \Delta(s)} b(s) ds$$

$$\text{con } \Delta(x) = \int_{x_0}^x a(s) ds, \quad \Delta(x_0) = 0$$

OSS:

TUTTE LE SOL. SONO DEFINITE GLOBALMENTE

cioè $\forall x \in \mathbb{R}$



TEOREMA (DI ESISTENZA E UNICITÀ)

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$$

f CONTINUA IN x E y

E LIPSCHITZIANA IN y

$\Rightarrow \exists \delta \in \exists$ unica $y(x) \in C^1((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ SOLUZIONE.

OSS: SENZA f LIPISCH. NON C'È UNICITÀ

$$y' = \sqrt{|y|} \quad (\text{BATTU DI PEANO})$$

TEO (PEANO)

SE f È SOLO CONTINUA $\exists$ UNA SOL. $y \in C^1(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

IN GENERALE NON UNICA.

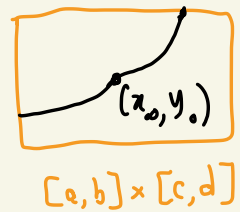
DEF: SI DICE SOL. MASSIMALE DEL PB DI CAUCHY

UNA SOL. $y \in C^1(I)$, $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ E $y(x_0) = y_0$,

T.C. SE $z \in C^1(I')$ È UN'ALTRA SOL. $\Rightarrow I' \subseteq I$.

NELLE IPOTESI DEL TEO DI ESISTENZA E UNICITÀ

$\exists!$ $y \in C^1(I)$ SOL. MASSIMALE DEL PROBLEMA DI CAUCHY,
con $I \subseteq [a, b]$.



TEO NELLE IPOTESI DEL TEO DI $\exists!$,
SIA $y \in C^1([a', b'])$ LA SOL. MASSIMALE,

- SI HA
- ① $b' = b$ o $(b' < b \text{ e } \lim_{x \rightarrow b'^-} y(x) \in \{c, d\})$
 - ② $a' = a$ o $(a' > a \text{ e } \lim_{x \rightarrow a'^+} y(x) \in \{c, d\})$

OSS: se $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ allora

① $b' = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow b'^-} y(x) = \pm \infty$ (ASINTOTO VERTICALE)

② $a' = -\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a'^+} y(x) = \pm \infty$

DIN: DIMOSTRIAMO ① E SUPP. $b' < b$.

MOSTRIAMO CHE $\exists \lim_{y \rightarrow b'^-} y(x) = \alpha \in [c, d]$.

MA ALLORA $\alpha \in \{c, d\}$, ALTRIMENTI POTREMMO PROLUNGARE LA SOL. E NON SAREBBE MASSIMALE.

SUPP. PER ASSURDO CHE

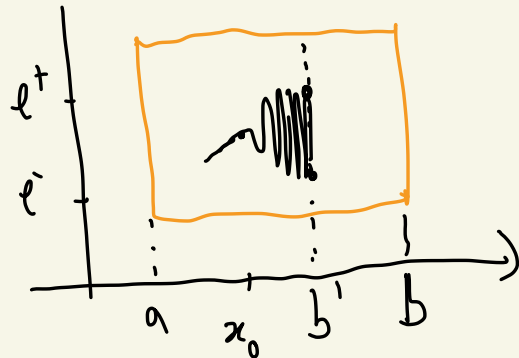
$$\limsup_{y \rightarrow b^{1-}} y(x) = l^+ > l^- = \liminf_{x \rightarrow b^{1-}} y(x)$$

PER LAGRANGE, $\exists x_n \rightarrow b^-$ T.C.

$$|y'(x_n)| = |f(x_n, y(x_n))| \rightarrow +\infty$$

$$\text{MA } |f(x_n, y(x_n))| \leq \max_{[b'-\delta, b'] \times [l^+-\varepsilon, l^++\varepsilon]} |f(x, y)| < +\infty \quad \text{PER } n \gg 1$$

ASSURDO.



TEO (CONFRONTO)

$y_1, y_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ sol. di $y' = f(x, y)$, I INTERVALLO,

con f CONTINUA E (LOC.) LIPSCITZ IN y

$$\Rightarrow \textcircled{1} \quad y_1(x) > y_2(x) \quad \forall x \in I$$

$$\textcircled{2} \quad y_1(x) < y_2(x) \quad \forall x \in I$$

$$\textcircled{3} \quad y_1(x) = y_2(x) \quad \forall x \in I.$$

Dim. SUPP. CHE $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ PER QUALCHE $x_0 \in I$

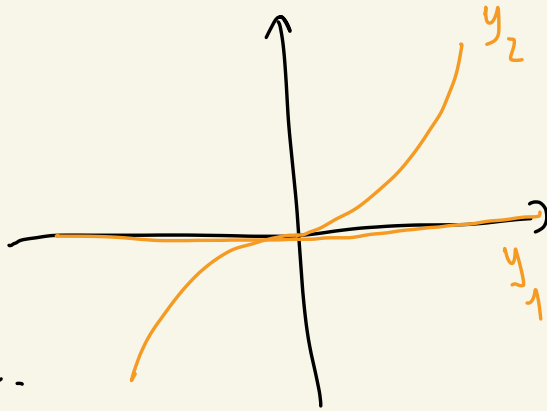
$\Rightarrow$ PER UNICITÀ $y_1(x) = y_2(x) \quad \forall x \in I.$

OSS: NON VALE PER f SOLO CONTINUA

$$y' = \sqrt{|y|}$$

$$y_1(x) = 0 \quad \text{È SOL.}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{4} & x < 0 \end{cases} \quad \text{È SOL.}$$



DEF: $y \in C^1(I)$ È UNA SOPRA SOL. (RISP. SOTTO SOL.)

$$\text{O} \quad y' = f(t, y) \quad \text{SE} \quad y'(x) \geq f(x, y(x)) \quad \forall x \in I$$

$$(\text{RISP.} \quad y'(x) \leq f(x, y(x)) \quad \forall x \in I)$$

LA SOPRASOL. (RISP. SOTTOSOL.) SI DICE STRETTA
SE C'È LA DISUGUAGLIANZA STRETTA

TEO: $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ y_1 SOPRASOL. di $y' = f(x, y)$
 y_2 SOTTOSOL. " "
 $x_0 \in I$ UNA DELLE DUE STRETTA

$$(1) \quad y_1(x_0) \geq y_2(x_0) \Rightarrow y_1(x) > y_2(x) \quad \forall x > x_0, x \in I$$

$$(2) \quad y_1(x_0) \leq y_2(x_0) \Rightarrow y_1(x) < y_2(x) \quad \forall x < x_0, x \in I.$$

Din. DINOSTRIANO (1).

OSSERVIANO CHE, SE $y_1(x_0) = y_2(x_0)$,

$$\Rightarrow y_1'(x_0) > y_2'(x_0) \Rightarrow y_1(x) > y_2(x)$$

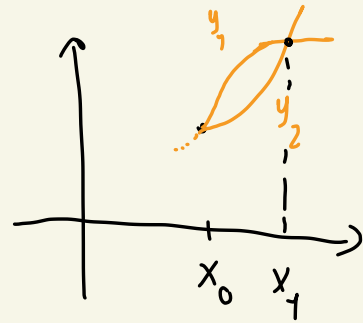
PER $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

POSSO SUPPORRE CHE $y_1(x_0) > y_2(x_0)$.

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE $\exists x_1 > x_0$ T.C.

$$y_1(x_1) = y_2(x_1) \quad \text{E} \quad y_1(x) > y_2(x) \quad \forall x \in (x_0, x_1).$$

$$\Rightarrow y_1'(x_1) \leq y_2'(x_1), \quad \text{ASSURDO.}$$



STUDIO QUALITATIVO DELLE SOL. DI $y' = f(x, y(x))$

OBIETTIVO: DISEGNARE TUTTE LE SOL.

PASSI:

- ① DOMINIO DI f
- ② SEGNO DI f , ZONE DI MONOTONIA DELLE SOL. $y(x)$
- ③ SOL. COSTANTI, CIOÈ $y \in \mathbb{R}$ T.C. $f(x, y) = 0 \quad \forall x$.
- ④ SIMMETRIE DI f
- ⑤ ASINTOTI ORIZZONTALI E VERTICALI
(USANDO SOPRA / SOTTO SOLUZIONI)
- ⑥ DERIVATE SECONDE DI $y(x)$

ESEMPLO: $y'(x) = x \left(1 + \frac{1}{y} \right)$

$$f(x, y) = x \left(1 + \frac{1}{y} \right)$$

$$\text{dom}(f) = \{(x, y) : y \neq 0\}$$

$$f \in \text{loc. LIP. in } y \text{ in } \text{dom}(f)$$

SEGNO DI f

$$f(x, -1) = 0 \quad \forall x$$

$$y(x) = -1 \quad \text{SOL. COSTANTE}$$

$$f(0, y) = 0 \quad \forall y$$

GUARDIANO LE $y(x)$

con $y(0) \in (-1, 0)$

$$y'(x) < 0 \quad x > 0$$

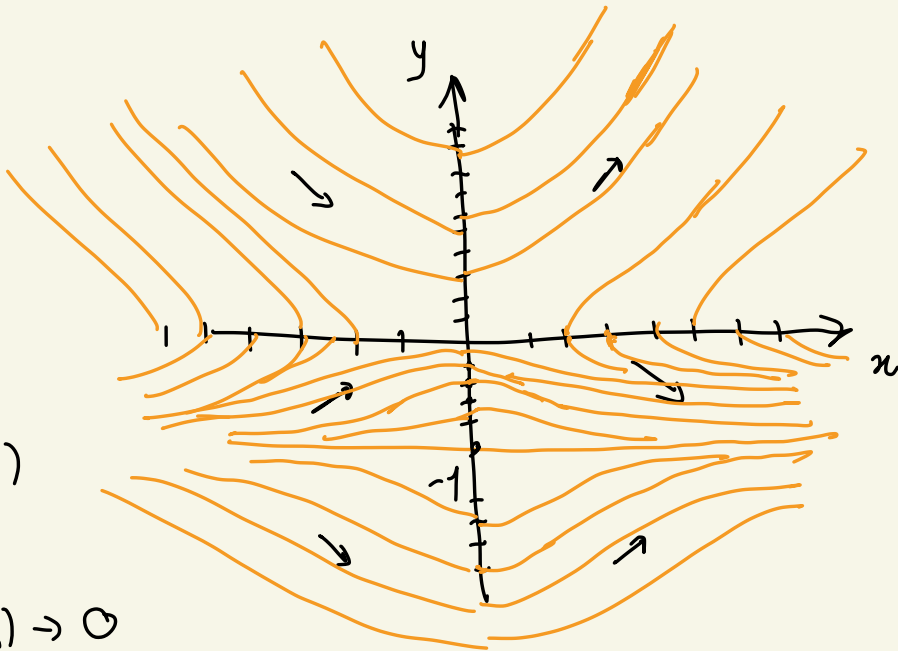
$$y'(x) > 0 \quad x < 0$$

$$y(x) \in (0, 1) \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = y_{\infty} \in (0, 1)$$

$$\exists x_n \rightarrow +\infty \text{ t.c. } y'(x_n) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_n y'(x_n) = \lim_n f(x_n, y(x_n)) = \lim_n x_n \cdot \frac{y_{\infty} + 1}{y_{\infty}} \Rightarrow y_{\infty} = -1.$$



VA CAPITO SE LE SOL. CON $y(x_0) > 0$ E $x_0 > 0$

SONO DEFINITE $\forall x > x_0$ O HANNO UN ASINTOTO VERTICALE.

SIA $y(x)$ UNA TALE SOL., OSSERVIAMO CHE

$$y(x_0) < y(x) \quad \forall x > x_0 \Rightarrow$$

$$x \leq f(x, y(x)) \leq x \left(1 + \frac{1}{y(x_0)} \right)$$

$\Rightarrow y_1(x)$ SOL. DI $y' = x$ È SOTTOSOL. STRETTA PER $x > x_0$

≠ $y_2(x)$ " " $y' = \left(1 + \frac{1}{y(x_0)} \right) x$ È SOPRASOL. STRETTA

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2} + \left(y(x_0) - \frac{x_0^2}{2} \right)$$

$$y_2(x) = \left(1 + \frac{1}{y(x_0)} \right) \frac{x^2}{2} + \left(y(x_0) - \left(1 + \frac{1}{y(x_0)} \right) \frac{x_0^2}{2} \right)$$

$\Rightarrow$ PER CONFRONTO $y_1(x) \leq y(x) \leq y_2(x) \quad \forall x > x_0$

C'E' SEMPRE ESISTENZA GLOBALE.

TEO (ESISTENZA GLOBALE)

y è sol. massimale di $y' = f(x, y(x))$

con $|f(x, y(x))| \leq a(x) + b(x) |y|$

a, b continue e positive

$\Rightarrow y$ è definita globalmente

Dim.

LE EQ. LINEARI

$$y' = a(x) + b(x)y$$

HANNO SOL. GLOBALI ED ESPLICITE, con cui
posso confrontare la sol. $y(x)$.

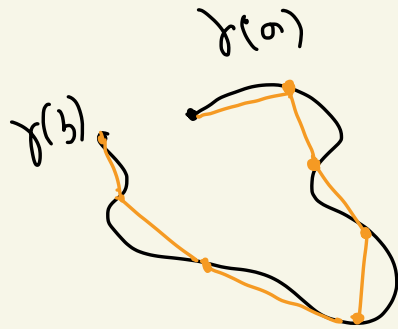


CURVE IN $\mathbb{R}^n$

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ CONTINUA, CURVA

$\gamma([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^n$ SUPPORTO DELLA CURVA

LA CURVA È "CHIUSA" SE $\gamma(a) = \gamma(b)$.



LUNGHEZZA

$$\pi = \{t_i\}_{i \in \{0, \dots, N\}}$$

$$t_0 = a < t_1 < \dots < t_N = b$$

$$L(\gamma) = \sup_{\pi} \sum_{i=0}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \in [0, +\infty], \quad \text{LUNGHEZZA DI } \gamma$$

LA CURVA È RETTIFICABILE SE $L < +\infty$

ES: $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\gamma(x) = (x, u(x)): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{CURVA}$$

$$\text{supp}(\gamma) = \Gamma_u$$

ABBIAIMO VISTO CHE, SE $u \in C^1$,

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + u'(x)^2} \, dx < +\infty$$

$\overline{PV}$ IN GENERALE

PROPOSIZIONE: $\gamma \in C^1 \Rightarrow$
 γ RETTIFICABILE E $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$

Din: FISSIAMO π PARTIZIONE DI $[a, b]$

$$\pi = \{t_0, \dots, t_n\}$$
$$|\gamma(t_{in}) - \gamma(t_i)| = \left| \int_{t_i}^{t_{in}} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{t_i}^{t_{in}} |\gamma'(t)| dt$$

SOMMANDO IN i

$$L(\gamma) = \sup_{\pi} \sum_i |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

MOSTRIAMO CHE $L(\gamma) \geq \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$

FISSIAMO $\varepsilon > 0$ E SCEGLIAMO π_ε T.C.

$$|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \varepsilon \quad \forall s, t \in [t_i, t_{i+1}]$$

SI PUÒ FARE PERCHÉ γ' È UNIF. CONTINUA.

SI HA CHE

$$\left| \gamma'(t) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(s) ds \right| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}]$$

QUINDI

$$\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)| dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(s) ds \right| < \varepsilon \quad \forall i$$

QUINDI, SOMMANDO IN i

$$\begin{aligned} \int_a^b |\gamma'(t)| dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)| dt \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \right| + \varepsilon (t_{i+1} - t_i) \right) \\ &= \sum_i |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| + \varepsilon (b-a) \\ &\leq L(\gamma) + \varepsilon (b-a). \end{aligned}$$

OSS: IL RISULTATO È VERO ANCHE
PER CURVE LIPSCHITZIANE

OSS: SE γ NON È INIETTIVA $L(\gamma)$
È UNA "LUNGHEZZA CON MOLTEPLICITÀ"

CURVE IN COORD. POLARI

DATA $\rho(\theta) : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow [0, +\infty)$

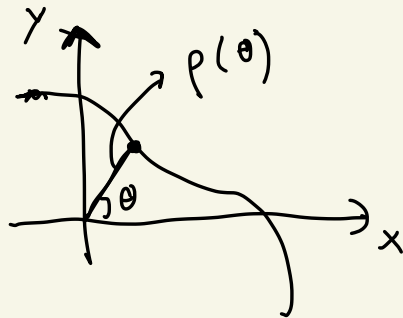
POSSO CONSIDERARE LA CURVA

$$\gamma(\theta) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta)$$

$$\rho \in C^1 \Rightarrow \gamma \in C^1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} |\gamma'(\theta)| = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[(\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta)^2 + (\rho' \sin \theta + \rho \cos \theta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\theta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2} d\theta \end{aligned}$$

CONTINUA



ESempi:

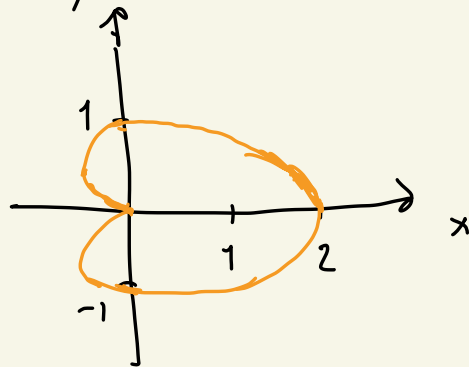
CERCHIO:

$$\rho(\theta) = R \quad \theta \in [0, 2\pi]$$
$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} = 2\pi R$$

CARDIOIDE:

$$\rho(\theta) = 1 + \cos \theta \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\rho'(\theta) = -\sin \theta$$



$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{e'^2 + e^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta$$

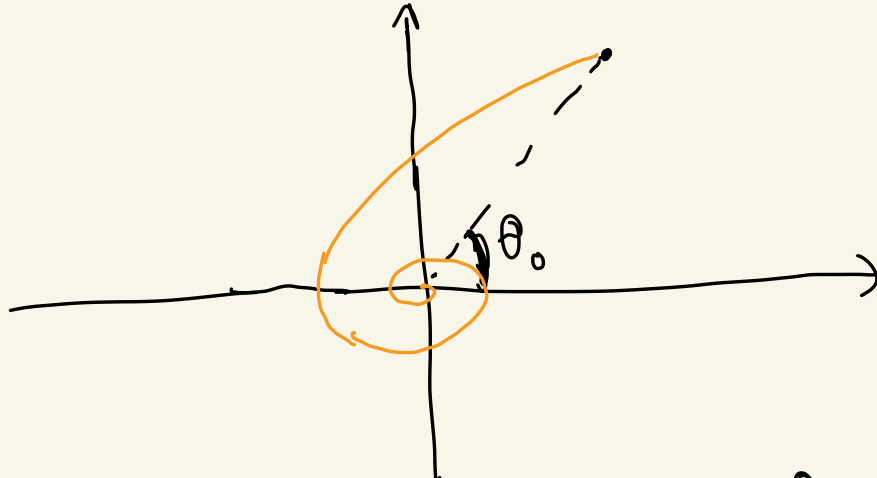
$$\left[\begin{aligned} \cos(\theta) &= \cos\left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \\ \sqrt{1 + \cos \theta} &= \sqrt{2} \cdot \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \end{aligned} \right]$$

$$L(\gamma) = 2 \int_0^{2\pi} \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| d\theta = 4 \int_0^{\pi} |\cos(t)| = 8 \int_0^{\pi/2} \cos t = 8$$

$$t = \frac{\theta}{2}, \quad 2dt = d\theta$$

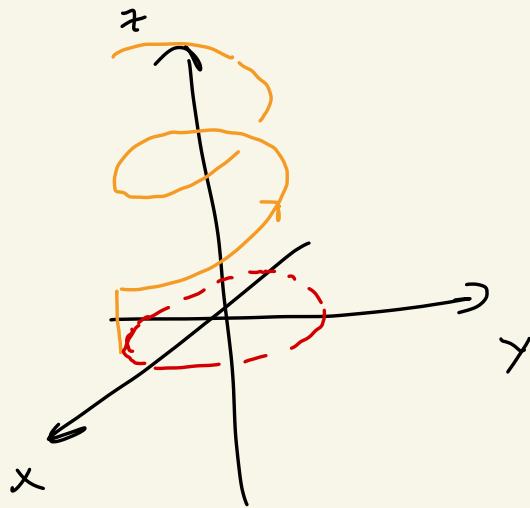
SPIRALE LOGARITMICA: $\rho(\theta) = e^{-\theta}$ $\theta \in [\theta_0, +\infty)$

$$\rho'(\theta) = -e^{-\theta}$$



$$L(\gamma) = \int_{\theta_0}^{+\infty} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{2} \int_{\theta_0}^{+\infty} e^{-\theta} = \sqrt{2} e^{-\theta_0}$$

ELICP: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $t \in [a, b]$



$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| = \int_a^b \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2} (b-a)$$

OSS: ① $\gamma'(t)$ si dice VELOCITÀ DELLA CURVA γ

$$\gamma': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\textcircled{2} \quad \tau(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \quad (\text{SE } |\gamma'(t)| \neq 0)$$

$$|\tau(t)| = 1 \quad \text{SI DICE}$$

VEETTORE TANGENTE ALLA CURVA γ